

Jean Pierre Giroud

mécanique des sols

tables pour le calcul des fondations

tome 1

Dunod

MÉCANIQUE DES SOLS

TECHNIP
DOCUMENTATION
D V L N

TABLES POUR LE CALCUL DES FONDATIONS

PAR
Jean-Pierre GIROUD

PRÉFACE DE

A. CAQUOT
Membre de l'Institut

TOME 1
Tassement

DUNOD
PARIS
1972

Jean-Pierre GIROUD est né en 1938. Il est ingénieur de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris, Licencié ès Sciences, Docteur de Spécialité et doit soutenir prochainement une thèse de Doctorat ès Sciences. Il enseigne la Mécanique des Sols à Grenoble comme professeur à l'Institut Universitaire de Technologie et il est chargé, à l'Université, du cours de préparation au doctorat qui, jusqu'à ces dernières années, était le seul cours en France à ce niveau en Mécanique des Sols. Monsieur GIROUD a effectué seul, ou en collaboration, des recherches sur la physico-chimie des argiles, la locomotion tous terrains, les sols gelés, la terre armée, les granulats routiers, les remblais, et, plus particulièrement sur les fondations. Ces travaux ont fait l'objet d'une soixantaine de publications, de conférences et de communications à des congrès, en France et à l'étranger. Par ailleurs, en tant qu'ingénieur ou expert près les tribunaux, il a été consulté pour une cinquantaine de projets, notamment de fondations et de barrages en terre, domaine où il est l'auteur de certaines innovations techniques. Membre de plusieurs sociétés savantes françaises et étrangères, Jean-Pierre GIROUD a reçu, en 1972, le "Prix des Jeunes" que la Société des Ingénieurs Civils de France décerne chaque année à un ingénieur de moins de 35 ans pour l'ensemble de ses travaux.

© DUNOD, 1972

"Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration".

A toi,

A vous pour qui voilà un bel album à colorier

A toi le rocher sur qui poussait une fleur, le rocher est brisé mais la fleur est
toujours là,

A celui pour qui le sol était celui d'Afrique,

Aux trois mousquetaires,

A l'amie de toujours, à celle d'un jour,

A l'ami présent comme à l'ami perdu,

A l'homme de trente ans dont je fus le fils à vingt ans,

A toi, l'éclair, pour qui j'ai changé la terre en eau,

A ceux qui ont mêlé leur travail au mien,

A ceux qui m'ont appris,

A ces vagues fraîches brûlées par le sable,

A la neige rose de soleil dans la fenêtre du soir,

Au grand air de sport et aux grands airs de fête.

PRÉFACE

Les fondations des constructions actuelles se situent de plus en plus sur des terrains de médiocre consistance, les populations, avec les industries, se portant de préférence vers les zones maritimes, ou vers les plaines bordant les grands fleuves pour des raisons de moindre frais de transport et de manutention.

Ces constructions exigent ainsi une étude préalable de mécanique des sols par l'ingénieur, étude basée sur la reconnaissance physique complète des différentes couches des terrains.

La stabilité des fondations et la connaissance de leurs tassements sont également indispensables pour la bonne tenue des constructions.

C'est pourquoi les tables que présente M. Giroud seront d'une grande utilité à l'Ingénieur qui projette une structure sur un sol déformable.

Il utilise le plus souvent pour la détermination des déformations les données de l'Elasticité calculées par Boussinesq et Cerruti, après s'être assuré préalablement que la résistance était suffisante et le système stable.

Les calculs numériques, où les programmes de calcul mécanique sont alors longs à établir et tendent à faire passer au second plan les variations possibles de la structure et de l'économie correspondante, alors que ce sont les études essentielles.

L'Ingénieur doit en effet étudier toutes les possibilités afin de réaliser la meilleure solution. Disposer de tableaux qui permettent de connaître immédiatement les résultats avec une approximation acceptable permet de faire soigneusement un travail réel d'ingénieur par le choix de la conception rationnelle dans le domaine du possible.

Le professeur Kravtchenko dans la présentation, donne une analyse d'ensemble du travail de M. Giroud. Elle indique à l'utilisateur comment sont établies les

tables et lui permet d'en comprendre le mécanisme. La division en deux groupes, l'un pour la déformation du domaine élastique, l'autre pour l'équilibre limite du domaine plastique correspond aux études à mener parallèlement. L'approximation du tassement est d'autant meilleure que l'équilibre retenu est plus éloigné de l'équilibre limite en plasticité.

Le travail de M. Giroud, par sa précision sera certainement fort apprécié des ingénieurs en raison de sa clarté et de la multiplicité des renseignements utiles.

Janvier 1972.

A. CAQUOT
Membre de l'Institut

PRÉSENTATION

I. INTRODUCTION

Il est plusieurs façons, pour un physicien, de contribuer au progrès de sa discipline. Il peut soit découvrir un phénomène nouveau, soit suggérer l'explication d'un phénomène déjà connu en l'interprétant au moyen d'un mécanisme approprié, soit déduire de ce mécanisme les équations du phénomène, soit en résoudre le problème d'analyse mathématique auquel on est ainsi conduit, soit, enfin, en confronter les prévisions du calcul, poussé jusqu'aux applications numériques, avec les résultats d'expérience spécialement conçue et réalisée pour tester la validité de la théorie proposée.

Les remarques ci-dessus — dont on demande au lecteur d'excuser la banalité — valent aussi pour la Mécanique. Mais les liens étroits de celle-ci avec l'Art de l'Ingénieur justifient les investigations d'une nature particulière à cette discipline. Tout d'abord, les travaux de génie ne devraient être entrepris qu'après avoir déterminé avec une précision suffisante les propriétés mécaniques des sols ou des roches en jeu. Or, on sait que la rhéologie des matériaux les plus usuels, tels que les argiles, est encore mal connue en dépit de longues recherches entreprises à ce sujet ; on ne dispose, pour les besoins de la pratique, que de lois approchées, valables seulement dans un intervalle de temps plus ou moins bref et pour une gamme limitée de contraintes. Remarquons que les formules approchées usuelles font abstraction des effets héréditaires dont l'influence est quelquefois sensible. D'ailleurs, dans le cas des sols, le problème se complique du fait de la présence de l'eau interstitielle, contenant de surcroît de l'air dissous. On est ainsi amené à étudier le problème de consolidation qui concerne donc un milieu polyphasique, dont l'évolution est régie par des lois de comportement complexes et encore mal élucidées. C'est pourquoi, on trouve dans la littérature des formes analytiques si variées pour les représenter. Mais l'exploitation numérique de ces formules dans

les problèmes concrets est très laborieuse et exige des délais incompatibles avec les nécessités industrielles et des moyens de calcul qui ne sont pas encore courants dans les bureaux d'études.

C'est pourquoi, l'Ingénieur projeteur devra se contenter souvent d'une connaissance très approximative des matériaux de construction, ce qui l'oblige à prévoir des marges de sécurité étendues et de se fier autant aux règles empiriques découlant d'une longue expérience, qu'à ses calculs. Pour cette raison, le terme d' "Art de l'Ingénieur" restera encore longtemps conforme à la réalité. Observons que la classe de problèmes concrets qu'on sait désormais traiter rigoureusement à partir d'hypothèses d'approximation explicitement formulées, s'étend tous les jours. Les solutions utilisées de ce type sont souvent classiques. Mais pour donner les résultats sous une forme immédiatement utilisable, il faut traiter numériquement un très grand nombre de cas, couvrant toute la gamme de variations de paramètres à prendre en compte. De plus, il faut présenter les données numériques sous forme d'abaques commodes, dont la consultation soit aisée. Un travail de cette nature exige donc un effort de longue haleine, souvent fastidieux mais qui peut être des plus utiles.

C'est à cette tâche que s'est attaqué M. Giroud ; nous allons analyser les problèmes qu'il a abordés, décrire les méthodes qu'il a utilisées pour les résoudre et donner un aperçu des résultats qu'il a obtenus.

II. OBJET DU TRAVAIL DE M. GIROUD. HYPOTHESES FONDAMENTALES

Dans le souci d'être utile au projeteur d'ouvrages à implanter sur un sol donné, M. Giroud s'est proposé de résoudre le problème suivant. Une répartition des charges données, invariable dans le temps, est appliquée à l'instant initial sur un domaine, de forme connue, de la surface libre de profil donné, d'un sol déterminé. C'est ce qui se passe dans le cas des fondations superficielles. Il s'agit alors de déterminer la répartition des contraintes dans le sol sous la fondation et trouver le tassement final du sol. Sous sa forme générale, cela revient à décrire le processus de la consolidation d'un sol saturé donné sous l'effet des charges connues. Pour des raisons analysées dans l'introduction, la solution rigoureuse de ce problème ne saurait être obtenue dans l'état actuel de la science, ne fût-ce qu'en raison de notre ignorance des lois exactes de comportement des milieux poly-

phasiques. M. Giroud ne l'aborde dans son étude qu'en adoptant des hypothèses approchées de la réalité.

Il se limite, en principe, à des sols à surface libre horizontale et formés des couches horizontales constituées par des matériaux homogènes et isotropes ; comme on sait qu'au cours du processus de consolidation, apparaît l'anisotropie, cette vue schématique ne peut être considérée que comme une première approximation de la réalité.

Quant à l'effet des charges, M. Giroud admet que :

1) la stabilité de la fondation est assurée si la charge réelle est inférieure à la plus petite des charges limites, calculées avant et après le drainage ; les équilibres limites correspondants sont déterminés en postulant la validité de la loi approchée de Coulomb pour le constituant de chaque couche, sec ou saturé ; l'angle de frottement et la cohésion avant et après le drainage sont supposés connus pour le matériau de chaque couche ;

2) le tassement du sol peut être décrit par la théorie de l'élasticité linéaire ; on schématisera alors le phénomène en distinguant le tassement instantané, avant le drainage caractérisé par un jeu donné de constantes élastiques et le tassement après le drainage, caractérisé par d'autres coefficients de Lamé regardés encore comme constants.

Ceux qui se sont mesurés avec les difficiles théories modernes de la consolidation comprendront l'audace théorique — voire même la témérité — de ces simplifications. Cependant, la confrontation des prévisions des calculs poursuivis à partir de ces bases, avec les données expérimentales (soit disponibles dans la littérature technique, soit fournies à M. Giroud par sa propre expérience d'Ingénieur), semble concluante et, dans les limites que l'Auteur précise, ses Tables suffisent pour la pratique industrielle courante, encore que des effets assez fins mais sensibles échappent nécessairement à son analyse.

Quoi qu'il en soit, pour aboutir aux résultats numériques, il faut savoir résoudre dans chaque cas envisagé :

- a) un problème d'équilibre limite (en plasticité),
- b) un problème d'élasticité linéaire.

On ne sait écrire les équations du premier que dans le cas du plan et celui de révolution. La résolution numérique peut être, à la suite des travaux de Caquot, de Sokolowski et de l'Ecole de Grenoble, regardée comme classique. Mais les cas ainsi traités sont loin de couvrir toute la gamme utile en pratique. M. Giroud propose alors pour le cas général des méthodes approchées de calcul, qui manquent certes de justification théorique rigoureuse mais qui conduisent aux résultats en accord suffisant avec les données expérimentales disponibles.

Le second problème, d'élasticité linéaire, abordable même dans le cas tridimensionnel, est résolu par intégration de la solution classique que Boussinesq a jadis donnée pour une charge ponctuelle. La méthode suivie ne fait appel à aucune idée nouvelle ; mais les difficultés de calcul sont réelles et M. Giroud les surmonte avec maîtrise.

Nous avons déjà insisté sur les approximations consenties par l'Auteur quant à la forme analytique des lois de comportement. Cela faisant, nous ne faisons que suivre M. Giroud lui-même qui met constamment son lecteur en garde contre une confiance excessive en les formules obtenues à partir d'hypothèses dont il connaît, mieux que quiconque, la fragilité relative.

Telles sont les bases théoriques du travail de l'Auteur dont il convient maintenant d'analyser les résultats et de souligner l'intérêt pratique.

III. ANALYSE DES CONCLUSIONS DE M. GIROUD

Le lecteur qui ne ferait que parcourir le travail de M. Giroud sera déjà frappé par le nombre élevé de cas particuliers traités dans l'ouvrage. La tâche matérielle que l'Auteur a ainsi accomplie est immense ; on ne peut qu'admirer sa ténacité et sa patience. Que l'on songe à la variété des paramètres dont dépend la solution de ces problèmes : nombre de couches horizontales du sol, chacune étant caractérisée par 9 paramètres mécaniques (deux valeurs de l'angle de frottement, deux valeurs de la cohésion, deux valeurs pour chacune des constantes de Lamé — les deux jeux de paramètres caractérisant le sol sec et le sol saturé — et le poids spécifique du matériau) ; la répartition de ces couches suivant la verticale (qui est variable d'un cas à l'autre) ; la géométrie du domaine sur lequel sont réparties les charges appliquées ; les lois de répartition de ces charges. L'expérience d'Ingénieur de M. Giroud lui a permis de sélectionner judicieusement les cas trai-

tés et de résoudre les plus significatifs. Mais l'Auteur indique des méthodes d'interpolation susceptibles de permettre de calculer les cas quelconques. On notera que ce problème d'approximation ainsi posé n'est pas immédiat à résoudre. Il a fallu analyser avec minutie les données numériques sûres et dégager les règles d'interpolation ; complétée par l'hypothèse de continuité, cette analyse conduit l'Auteur à présenter des procédés de calcul simples, illustrés par de nombreux exemples.

Le progrès ainsi réalisé par rapport aux résultats antérieurement disponibles est considérable : on notera à cet égard les nombreux résultats relatifs aux charges obliques, aux milieux stratifiés et aux fondations rigides. Pour atteindre un tel objectif, il a fallu posséder une grande maîtrise des sujets variés : théories de la plasticité et de l'élasticité linéaire, méthodes de l'analyse numérique ; calcul pratique des fondations ; données expérimentales obtenues sur des modèles de laboratoire ; données de chantier (déblais, remblais, bâtiments, etc.). La contribution de M. Giroud ne réside pas — on l'a déjà dit — en la mise en oeuvre d'idées originales. Mais il fait preuve d'un remarquable esprit de synthèse et d'analyse à la fois. Il a le sens du réel, de l'utile, il sait faire l'examen critique pertinent des résultats disponibles dans la littérature ; il possède le sens de l'approximation physique, développé au cours d'une expérience d'Ingénieur déjà longue. Et c'est pourquoi on peut accepter avec confiance ses résultats numériques et ses conseils pratiques.

La conception même des Tables a exigé un effort qu'on a envie de qualifier de créateur. M. Giroud s'est proposé de grouper les résultats de telle sorte qu'un praticien peu familier de la théorie des fondations puisse faire rapidement le calcul d'un ouvrage. Or la variété des cas à envisager était telle que le lecteur néophyte risquait d'avoir de la peine à trouver les données susceptibles de l'intéresser et à se servir de la technique d'interpolation pour traiter son problème particulier quand celui-ci n'est pas explicitement résolu dans l'ouvrage. C'est pourquoi la recherche d'une présentation des tables ainsi que la rédaction des commentaires indispensables pour leur utilisation soulevaient des difficultés. Il me semble que M. Giroud a réussi au-delà de mes espoirs et j'aurais été plus affirmatif si cette opinion était celle d'un spécialiste de Génie Civil. Or, M. Giroud a testé à cet égard son ouvrage, en faisant lire le manuscrit à des praticiens de compétences variées. Leur jugement confirme le mien.

C'est pourquoi, je crois que les Tables de M. Giroud ne tarderont pas, une fois publiées, à devenir le manuel indispensable des Ingénieurs des bureaux d'études de Génie Civil. S'il en était ainsi, le théoricien que je suis et qui a contribué à traiter quelques problèmes de plasticité — dont les solutions sont utilisées dans l'ouvrage — éprouverait une vive satisfaction en voyant pénétrer dans la pratique industrielle courante les résultats fondamentaux que d'aucuns jugeaient inutiles. Et l'ancien Professeur de M. Giroud se féliciterait d'avoir contribué à la formation scientifique d'un homme qui, grâce à sa double culture de savant et d'Ingénieur, a su tirer de ses leçons de jadis un si heureux parti.

Janvier 1972.

J. KRAVTCHENKO

Professeur à l'Université de Grenoble

TABLE DES MATIÈRES

Préface.....	VII
Présentation.....	IX
Liste des notations.....	XXI
Introduction.....	1
1. Définitions.....	2
2. Comportement d'un sol chargé.....	3
3. Propriétés du sol.....	7
4. Calcul de la force portante.....	8
5. Calcul du tassement.....	9
6. Etendue des cas envisagés.....	13
7. Présentation des tables.....	15
8. Les unités.....	16
9. Notations.....	17
10. Bibliographie.....	19
11. Remerciements.....	20
Chapitre 1. — GENERALITES.....	23
1.1 Conversion d'unités.....	25
1.2 Formulaire de Mécanique des Milieux Continus.....	31
1.3 Formulaire d'élasticité linéaire.....	41
1.4 Formulaire de plasticité.....	57
1.5 Ordres de grandeur des caractéristiques du sol.....	63

PREMIÈRE PARTIE : TASSEMENT

Chapitre 2. — CHARGES CONCENTREES.....	71
2.1 Force concentrée <u>ponctuelle</u> sur un sol homogène d'épaisseur infinie.....	77
2.2 Force normale concentrée <u>ponctuelle</u> sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.....	133
2.3 Force normale concentrée <u>ponctuelle</u> sur un sol composé de deux couches.....	151
2.4 Force normale concentrée sur une <u>ligne de longueur finie</u> sur un sol homogène d'épaisseur infinie.....	163
Chapitre 3. — FONDATIONS CIRCULAIRES.....	179
3.1 Fondation circulaire exerçant une charge <u>normale uniforme</u> sur un sol homogène d'épaisseur infinie.....	181
3.2 Fondation circulaire exerçant une charge <u>normale uniforme</u> sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.....	215
3.3 Fondation circulaire exerçant une charge <u>normale uniforme</u> sur un sol composé de deux couches.....	239
3.4 Fondation circulaire exerçant une charge <u>normale uniforme</u> sur un sol composé de trois couches.....	259
3.5 Fondation circulaire exerçant une charge <u>normale uniforme</u> sur un sol dont le module augmente linéairement avec la profondeur.....	281
3.6 Fondation circulaire <u>rigide</u> exerçant une charge normale centrée sur un sol homogène d'épaisseur infinie.....	285
3.7 Fondation circulaire <u>rigide</u> exerçant une charge normale excentrée sur un sol homogène d'épaisseur infinie.....	315
3.8 Fondation circulaire <u>rigide</u> exerçant une charge normale centrée sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.....	319
3.9 <u>Remblai conique</u> ou tronconique sur un sol homogène d'épaisseur infinie.....	325
3.10 Fondation <u>annulaire</u> sur un sol homogène d'épaisseur infinie.....	345

SOMMAIRE DU TOME 2

(Suite de la PREMIÈRE PARTIE : TASSEMENT)

Chapitre 4. — FONDATIONS RECTANGULAIRES

- 4.1 Fondation rectangulaire exerçant une charge linéairement répartie sur un sol homogène d'épaisseur infinie.
- 4.2 Fondation rectangulaire exerçant une charge normale linéairement répartie sur un sol homogène d'épaisseur infinie.
- 4.3 Fondation rectangulaire exerçant une charge normale uniformément répartie sur une couche de sol d'épaisseur finie.
- 4.4 Fondation rectangulaire exerçant une charge inclivée uniformément répartie sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.
- 4.5 Fondation rectangulaire rigide exerçant une charge verticale sur un sol homogène d'épaisseur infinie.
- 4.6 Remblai à base rectangulaire sur un sol homogène d'épaisseur infinie.

Chapitre 5. — FONDATIONS DE FORME QUELCONQUE.

- 5.1 Fondation de forme quelconque sur un sol homogène d'épaisseur infinie.
- 5.2 Fondation de forme quelconque sur une couche de sol d'épaisseur finie.

Chapitre 6. — FONDATIONS DE GRANDE LONGUEUR

- 6.1 Charge concentrée sur une ligne de grande longueur exercée sur une couche d'épaisseur infinie.
- 6.2 Charge normale concentrée sur une ligne de grande longueur exercée sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.
- 6.3 Charge normale concentrée sur une ligne de grande longueur exercée sur un sol composé de deux couches.
- 6.4 Fondation de grande longueur exerçant une charge linéairement répartie sur un sol homogène d'épaisseur infinie.
- 6.5 Fondation de grande longueur exerçant une charge normale uniforme sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.

- 6.6 Fondation de grande longueur exerçant une charge normale uniforme sur un sol composé de deux couches.
- 6.7 Fondation de grande longueur exerçant une charge normale uniforme sur un sol d'épaisseur infinie dont le module augmente avec la profondeur.
- 6.8 Fondation rigide de grande longueur exerçant une charge inclinée et excentrée sur un sol homogène d'épaisseur infinie.
- 6.9 Fondation rigide de grande longueur exerçant une charge normale excentrée sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.
- 6.10 Remblai de grande longueur et de section triangulaire ou trapézoïdale sur un sol homogène d'épaisseur infinie.
- 6.11 Remblai de grande longueur et de section triangulaire ou trapézoïdale sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.
- 6.12 Charge de grande longueur distribuée de façon quelconque sur un sol homogène d'épaisseur infinie.
- 6.13 Charge de grande longueur distribuée de façon quelconque sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie.

SOMMAIRE DU TOME 3

DEUXIÈME PARTIE : FORCE PORTANTE

Chapitre 7. — CHARGE NORMALE CENTREE.

- 7.1 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge verticale centrée sur un sol homogène horizontal.
- 7.2 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge verticale centrée sur un sol horizontal finement stratifié.
- 7.3 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge verticale centrée sur un sol horizontal anisotrope.
- 7.4 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge verticale centrée sur une couche horizontale et d'épaisseur finie de sol homogène.
- 7.5 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge verticale centrée sur un sol composé de deux couches horizontales.
- 7.6 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge verticale centrée sur un sol horizontal dont la cohésion varie avec la profondeur.
- 7.7 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge verticale centrée sur un sol horizontal contenant une nappe phréatique.
- 7.8 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge verticale centrée sur un sol homogène en pente.
- 7.9 Fondation à *base oblique* exerçant une charge normale centrée sur un sol homogène horizontal.

Chapitre 8. — CHARGE INCLINEE ET EXCENTREE.

- 8.1 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge inclinée et excentrée sur un sol horizontal homogène.
- 8.2 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge inclinée et excentrée sur un sol homogène horizontal mais de niveau différent de part et d'autre de la fondation.
- 8.3 Fondation à *base horizontale* exerçant une charge inclinée et excentrée sur un sol homogène en pente.
- 8.4 Fondation à *base oblique* exerçant une charge inclinée et excentrée sur un sol homogène horizontal.

LISTE DES NOTATIONS

Nous ne donnons ici que les notations générales utilisées
dans plusieurs chapitres

- a : demi-largeur de fondations de longueur infinie, demi-côté parallèle à Ox de fondations rectangulaires.
- B : largeur des fondations rectangulaires ou des fondations de longueur infinie.
- b : longueur de semelle filante, demi-côté parallèle à Oy de fondation rectangulaire.
- c : cohésion du sol (pour les calculs de force portante), largeur de la pente d'un remblai (pour les calculs de tassement).
- D : profondeur de la base des fondations.
- d : distance.
- E : module d'Young du sol.
- E_x, E_y : distance entre le centre de la fondation et le point d'application de la charge suivant Ox et Oy.
- e_x, e_y : excentricité de la charge suivant Ox et Oy.
- e_{opt} : excentricité optimale.
- F : force appliquée sur le sol.
- f : force par unité de longueur.
- f_n, f_t : composantes normale et tangentielle de f.
- $f_n \lim$: force portante par unité de longueur.
- g : accélération de la pesanteur.
- H : épaisseur d'une couche de sol reposant sur un substratum (rarement : cohésion normale, $H = c \cotg \phi$).
- h : hauteur du remblai.

- L : longueur des fondations rectangulaires.
 M : moment.
 M_x, M_y : moments respectivement autour de Ox et de Oy .
 N : composante normale de F .
 p : contrainte normale uniforme.
 q : contrainte normale suivant une distribution linéaire antisymétrique.
 R : rayon des fondations circulaires.
 r : distance radiale.
 r, θ, z : coordonnées cylindriques d'un point.
 r_{cq}, r_γ : coefficients de réduction sur la force portante dus à l'excentricité de la charge.
 s : contrainte tangentielle uniforme.
 T : composante tangentielle de F .
 t : contrainte tangentielle suivant une distribution linéaire symétrique.
 u, v : composantes horizontales du déplacement (coordonnées cartésiennes).
 u_r, u_θ : composantes horizontales du déplacement (coordonnées cylindriques).
 u_ρ, u_θ, u_ψ : composantes du déplacement (coordonnées sphériques).
 w : tassement (composante verticale du déplacement).
 w_m : tassement moyen.
 x, y, z : coordonnées cartésiennes d'un point.
 α : rapport des côtés d'un rectangle.
 β : pente du terrain (quelquefois : épaisseur adimensionnelle de la couche).
 γ : poids volumique du sol.
 γ' : poids volumique immergé.
 γ_d : poids volumique sec.
 γ_{sat} : poids volumique saturé.
 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$: composantes tangentielles du tenseur déformation (distorsions).
 δ : inclinaison de la charge.
 δ' : inclinaison des contraintes au contact de la fondation et du sol.
 δ^* : inclinaison fictive.
 ϵ : variation de volume du sol (sert quelquefois à désigner $+1$).
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: composantes normales du tenseur déformation (dilatations).
 ζ : désigne z/a ou $z/2a$.
 θ : angle entre Ox et Or .

- ν : coefficient de Poisson du sol.
- π : 3,1416.
- ρ : distance entre l'origine 0 et le point considéré (quelquefois : masse volumique du sol).
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: composantes normales du tenseur contrainte.
- σ_m : contrainte moyenne.
- $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$: composantes tangentielles du tenseur contrainte.
- \varnothing : angle de frottement interne du sol.
- ϕ : rotation.
- ϕ_x, ϕ_y : rotation autour de Ox, de Oy.
- ϕ_m : rotation moyenne.
- ψ : angle entre l'axe Oz et l'axe Op.
- ω : inclinaison de la base d'une fondation.

INTRODUCTION

Peut-être avez-vous un problème de fondation à étudier de toute urgence ?

Dans ce cas :

- s'il s'agit d'un problème de tassement, reportez-vous, selon la forme de la fondation, à la première page des chapitres suivants qui constituent la première partie de l'ouvrage :
 - *Charge concentrée*, Chap. 2 : ce cas pourra vous fournir un premier dégrossissage du problème dans le cas de semelles isolées ou filantes...
 - *Fondation circulaire*, Chap. 3 : réservoirs de pétrole, radiers, cheminées...
 - *Fondation rectangulaire*, Chap. 4 : radiers, semelles, remblais.
 - *Fondation de forme quelconque*, Chap. 5 : stockages, remblais, radiers de forme compliquée.
 - *Fondation de grande longueur*, Chap. 6 : semelles filantes, radiers, remblais.
- s'il s'agit d'un problème de force portante, reportez-vous, selon le type de charge, à la première page des chapitres suivants qui constituent la deuxième partie de l'ouvrage :
 - *Charge verticale centrée*, Chap. 7.
 - *Charge inclinée et excentrée*, Chap. 8.

La première page de chacun de ces sept chapitres donne la *liste des cas traités*. Choisissez celui qui se rapproche le plus du problème que vous étudiez et reportez-vous à la section correspondante.

Une fois votre problème résolu, ou dès maintenant si vous avez quelques minutes, nous vous invitons à lire les lignes qui suivent où nous présentons les ques-

tions traités dans cet ouvrage et donnons des indications pratiques aux utilisateurs des tables.

1. DEFINITIONS

Le langage courant manque de précision à propos des fondations. Ainsi, le mot *fondation* désigne tantôt le sol qui supporte l'ouvrage (dans le cas des remblais, par exemple), tantôt (comme dans le cas des bâtiments) la partie basse de l'ouvrage, celle qui applique la charge sur le sol. Il nous paraît préférable de réserver le mot *fondation* à ce second usage et d'employer l'expression *sol de fondation* pour désigner dans tous les cas (bâtiments, remblais...) le sol qui supporte l'ouvrage. Dans les textes qui accompagnent les tables, pour éviter toute confusion, nous employons les expressions *sol* et *charge*.

Le contact entre la charge et le sol est défini par sa profondeur D , et par sa surface (Fig. 1). Si celle-ci est rectangulaire on désigne sa *longueur* par L et sa *largeur* par B . Si elle est circulaire, on désigne son *rayon* par R .

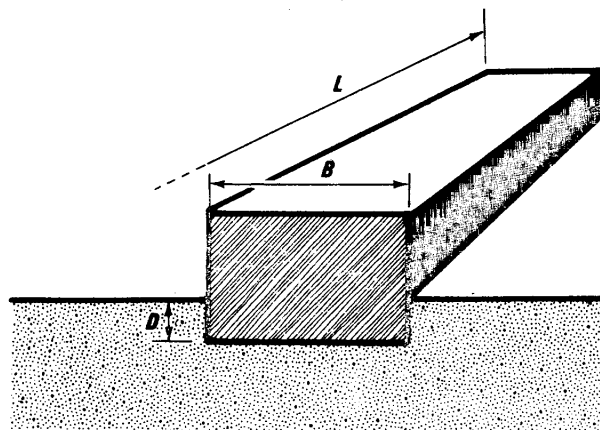


FIG. 1. — Définition du contact entre le sol et une charge à base rectangulaire.

On distingue les *fondations superficielles*, pour lesquelles le rapport D/B est petit (inférieur à 2 ou 3) et les *fondations profondes* pour lesquelles ce rapport est grand ($D/B > 10$). Entre les deux se trouve le cas des *fondations semi-profondes*.

Les résultats présentés ici ne concernent que les fondations superficielles. Ceci exclut donc de notre étude les fondations sur pieux, puits, etc. Les tables ne peuvent donc être utilisées que pour les problèmes de fondations posées par les remblais, les bâtiments fondés sur *semelles* ou *radiers*, les réservoirs posés à même le sol, les murs de soutènement, etc.

2. COMPORTEMENT D'UN SOL CHARGE

Appliquons sur un sol sec une charge F (Fig. 2). Elle s'enfonce d'une valeur w appelée tassement. Si l'on recommence cette expérience avec diverses valeurs de F , on obtient la courbe du tassement en fonction de la charge, $w(F)$ (Fig. 3). Cette courbe comprend deux parties distinctes :

- la première partie peut approximativement être considérée comme linéaire : le tassement est proportionnel à la charge ;
- la seconde partie traduit un brusque accroissement de l'enfoncement (1) dû à la rupture du sol ; elle admet pour asymptote une droite légèrement croissante dont l'ordonnée à l'origine, F_{lim} , est la force portante.

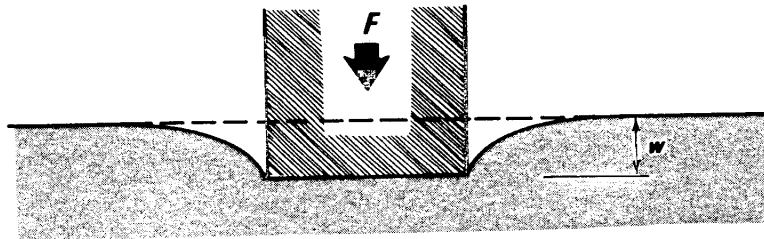


FIG. 2. - Tassement w dû à l'application d'une charge F sur le sol. La surface du sol avant application de la charge est représentée par un tiret.

(1) On préfère réserver le mot tassement pour désigner les enfoncements faibles relatifs à la première partie de la courbe.

Ainsi, un calcul de fondation se fait en deux temps :

- on calcule d'abord la force portante pour vérifier qu'elle est supérieure à la charge réellement appliquée par la fondation sur le sol (2) ;
- on calcule ensuite le tassement provoqué par la charge réelle.

Considérons maintenant un sol saturé sur lequel on applique, à un instant $t = 0$, une charge $F = F_1$ (Fig. 2). Elle s'enfonce instantanément d'une valeur w_u (*tassement instantané*), puis cet enfoncement va croître jusqu'à la valeur finale w' (*tassement final*), atteinte théoriquement au bout d'un temps infini (Fig. 4). Cette évolution du tassement en fonction du temps est liée au départ de l'eau contenue

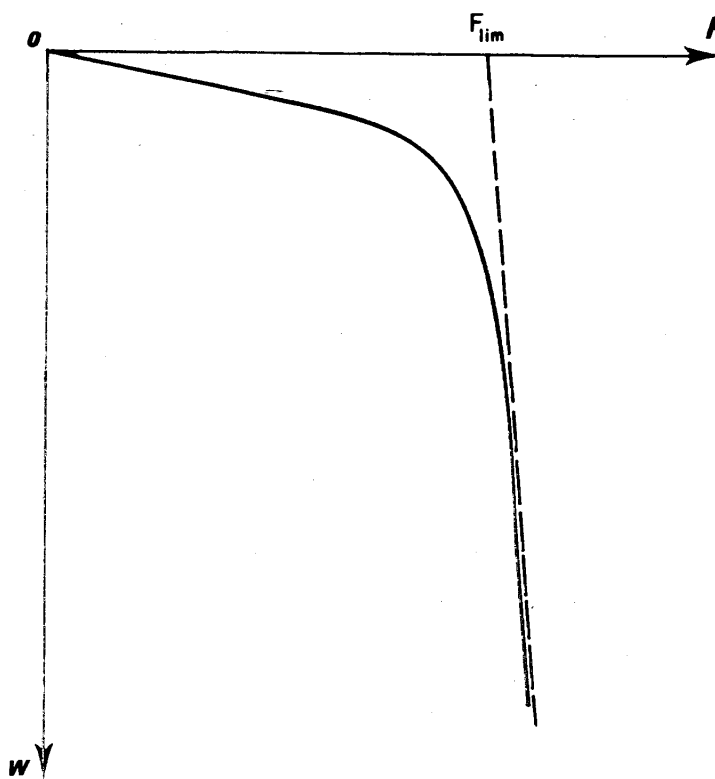


FIG. 3. — Courbe de l'enfoncement en fonction de la charge (Il ne s'agit bien entendu que d'un tracé schématique donnant l'allure moyenne des courbes expérimentales).

(2) On appelle *coefficient de sécurité* la valeur du rapport de la force portante à la charge réelle.

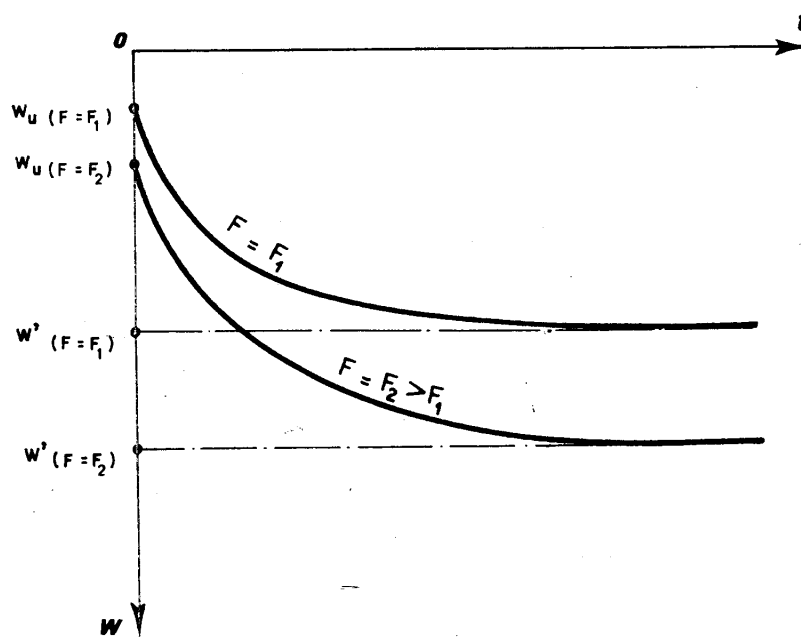


FIG. 4. — Evolution du tassement en fonction du temps pour deux charges appliquées F_1 et F_2 inférieures à la plus petite des charges limites $F_{\text{lim } u}$ et F'_{lim} .

dans le sol (*phénomène de consolidation*). Par conséquent, la courbe $w(t)$ se rapproche d'autant plus vite de son asymptote w' que le sol est plus perméable. En pratique, le temps mis pour atteindre 90 % du tassement final peut varier, selon les cas, de quelques instants à quelques années. En résumé, on retiendra que le tassement a pour valeur w_u avant drainage et w' après.

Si l'on recommence la même expérience avec une charge plus élevée ($F_2 > F_1$), on obtient un tassement plus important, mais son évolution en fonction du temps est analogue (Fig. 4), à condition toutefois que F_2 n'atteigne pas la valeur limite que nous allons définir maintenant.

Pour cela, procédons à une multitude d'expériences de chargement, analogues à celles décrites précédemment, et traçons les deux courbes représentant la variation du tassement instantané, w_u , et du tassement final, w' , en fonction de la charge F (Fig. 5). Ces deux courbes présentent la même allure que la courbe de la figure 3.

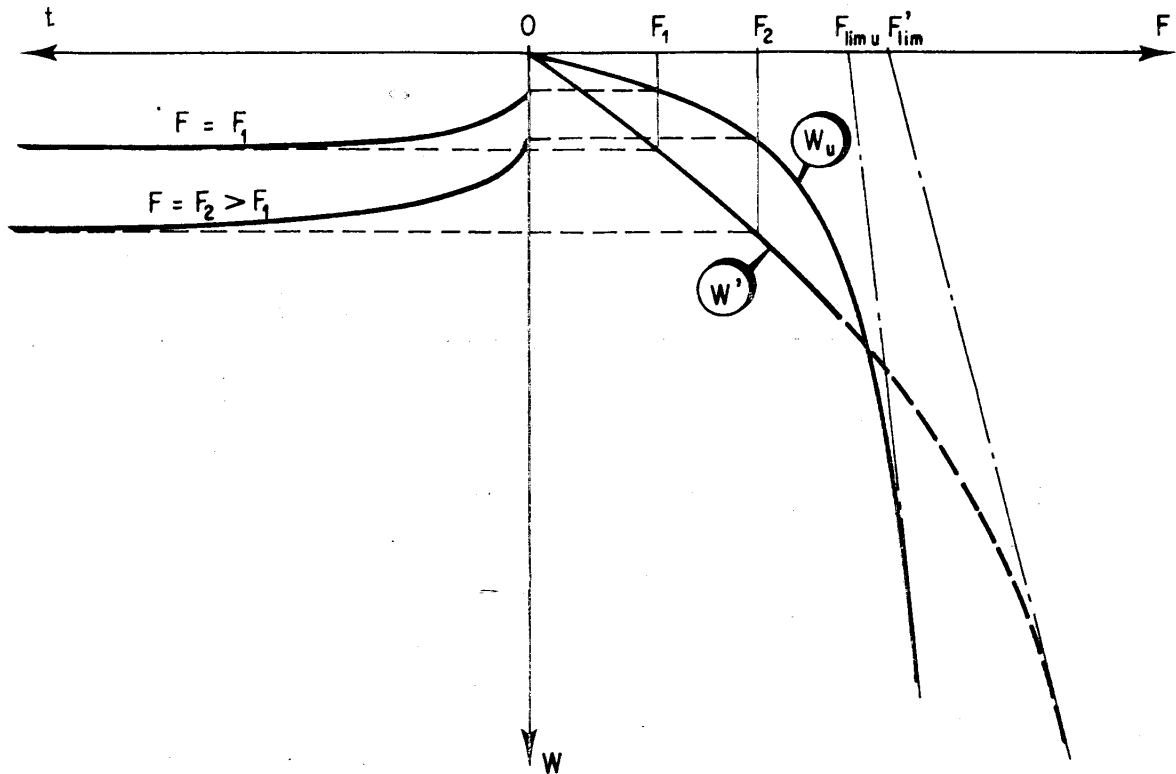


FIG. 5. — La partie droite du dessin représente les courbes de tassement instantané, w_u , et de tassement final, w' , en fonction de la charge appliquée, F . Ces courbes sont obtenues point par point à partir d'une multitude de courbes analogues à celles de la partie gauche du dessin (qui ne fait que reproduire la figure 4).

Appelons $F_{lim u}$ et F'_{lim} les ordonnées à l'origine des asymptotes des deux courbes de la figure 5. Ce sont les charges limites avant et après drainage du sol. En général, $F_{lim u}$ est inférieure à F'_{lim} . Mais dès que la charge F se rapproche de $F_{lim u}$ le sol se rompt instantanément et le tassement n'a pas le temps d'évoluer entre la courbe w_u et la courbe w' . La partie en tirets de cette dernière courbe ne correspond à rien dans notre expérience. Elle ne peut avoir de signification que si l'on évite la rupture du sol pour $F_{lim u}$, par exemple en le chargeant progressivement.

Dans la pratique, l'application d'une charge nécessite un certain temps (remplissage d'un réservoir, construction d'un remblai ou d'un bâtiment...). Si ce temps est grand par rapport à celui nécessaire pour le drainage du sol, seul le calcul de w' et de F'_{lim} nous intéressera (cas des argiles moyennement perméables et des silts si la vitesse de chargement est lente et des sols très perméables comme sables et graviers). Si ce temps est petit par rapport à celui nécessaire pour le drainage du sol, il faudra calculer w_u et $F'_{lim u}$, puis w' et F'_{lim} (cas des argiles moyennement perméables et des silts si la vitesse de chargement est rapide et des argiles peu perméables).

En conclusion, le calcul de fondation dans le cas du sol saturé est analogue à celui fait pour un sol sec :

- on calcule d'abord la force portante avant et après drainage pour vérifier que la plus petite des deux est supérieure à la charge réellement appliquée sur le sol ;
- on calcule ensuite le tassement en fonction du temps (et en particulier les valeurs initiale et finale) dû à la charge réelle.

Le calcul de la force portante fait appel à la théorie de la plasticité et celui du tassement à la théorie de l'élasticité. Le principe de ces deux calculs est indiqué dans les § 4 et 5 suivants.

3. PROPRIETES DU SOL

Le sol est défini par son poids volumique γ et son comportement est représenté par des paramètres mécaniques. Dans un but de simplification, nous supposons qu'il en suffit de quatre :

- deux paramètres plastiques, pour le calcul de la force portante : la cohésion, c , et l'angle de frottement interne, ϕ ;
- deux paramètres élastiques, pour le calcul du tassement : le module d'Young, E , et le coefficient de Poisson, ν .

Il convient de distinguer c_u et ϕ_u utilisés pour la force portante avant drainage et c' et ϕ' pour la force portante après drainage, de même que E_u et ν_u pour le tassement instantané et E' et ν' pour le tassement final. Quelques valeurs courantes de ces paramètres sont données dans la section "Ordres de grandeur des caractéristiques du sol", dans le chapitre "Généralités" (Section 1-5 du Chap. 1).

Mais il faut bien noter que ces valeurs ne sont données qu'à titre indicatif et ne sauraient dispenser de mesures au laboratoire ou *in situ*.

Dans la nature, les propriétés du sol varient d'un point à l'autre (*hétérogénéité*) et, en un point, varient suivant la direction (*anisotropie*). Tous les sols considérés dans cet ouvrage sont isotropes (sauf celui de la Section 7-3)(1) : les problèmes théoriques posés par l'anisotropie nous paraissent encore trop mal connus pour conduire à des applications pratiques. Des recherches sont en cours et il sera possible, dans une prochaine édition, de faire état de certains résultats. En revanche, nous considérerons certains cas simples d'hétérogénéité : sols dont les propriétés varient linéairement avec la profondeur et sols constitués de deux ou trois couches horizontales. Dans ce dernier cas, deux couches voisines sont supposées adhérer parfaitement l'une à l'autre, quoique nous ayons signalé, par endroits, des résultats concernant des couches glissant parfaitement les unes sur les autres.

4. LE CALCUL DE LA FORCE PORTANTE

Les formules donnant la force portante d'une fondation sur un sol sont établies à partir de la théorie de la plasticité, c'est-à-dire à l'aide de la loi de Coulomb (2). Ceci ne permet de traiter que les problèmes à deux dimensions. C'est pourquoi, dans les deux chapitres de la deuxième partie, "Force portante", il n'est question que de la largeur des fondations et jamais de leur longueur. Ne pas tenir compte de ce dernier paramètre revient à considérer que deux fondations de longueur différente, toutes choses égales par ailleurs, ont même pression limite (*force portante par unité de surface*). En fait, la longueur de la fondation doit intervenir et ceci fait actuellement l'objet de nombreuses études. Toutefois, de nombreux auteurs sont encore en désaccord sur cette question et l'ayant exami-

(1) Nous envisageons également un cas de sol finement stratifié, c'est-à-dire pratiquement anisotrope (voir la section "Fondation à base horizontale exerçant une charge verticale centrée sur un sol horizontal finement stratifié" (Section 7.2).

(2) Voir la section "Formulaire de plasticité" dans le chapitre "Généralités" (Voir Sect. 1-4).

née en détail, il nous paraît préférable, pour le moment, de se contenter de l'approximation qui consiste à ne pas faire intervenir la longueur de la fondation dans le calcul de la force portante.

Malgré ces limitations, la théorie de la plasticité a permis de résoudre un certain nombre de cas et d'obtenir les tables et graphiques des deux chapitres consacrés à la force portante. Dans ces cas, un calcul direct de la pression limite est possible. Nous donnons, dans le § 6 de cette introduction, une idée de l'étendue des cas résolus.

Dans tous les cas non résolus à ce jour, l'ingénieur doit faire lui-même un calcul approché de la pression limite en écrivant la loi de Coulomb le long de la surface de glissement supposée *a priori* circulaire. Cette méthode est analogue à celle utilisée couramment pour calculer la stabilité des pentes alors que, dans la résolution rigoureuse d'un problème de force portante, la surface de glissement est obtenue par le calcul.

Notons enfin que, pour un cas de fondation donné, la pression limite avant et après drainage se calcule avec la même formule où seules changent les valeurs de c et ϕ :

- avant drainage, c_u et ϕ_u ;
- après drainage, c' et ϕ' .

5. LE CALCUL DU TASSEMENT

Contrairement à ce qui se produit pour la plasticité avec la loi de Coulomb, en élasticité la loi de Hooke (1) permet aussi bien les calculs à deux dimensions qu'à trois. Tous les cas peuvent donc être traités et les limites actuelles ne sont dues qu'à la complexité de certains calculs numériques et à la difficulté de présenter simplement les solutions qui font intervenir de trop nombreux paramètres.

Etant donné un problème de tassement, deux cas sont à considérer.

(1) Voir la section "Formulaire d'élasticité" dans le chapitre "Généralités" (Sect. 1-3 du Chap. 1).

Si le problème a été résolu par la théorie de l'élasticité, il suffit de lire directement dans les tables la valeur du tassement. C'est ce que nous appelons le calcul direct du tassement et nous donnons, dans le § 6 de cette Introduction, une idée de l'étendue des cas envisagés. Toutefois, il convient d'être extrêmement prudent car un tel calcul n'est valable que si la nature du sol est bien conforme aux hypothèses. C'est pourquoi, dans chaque section, nous mettons en garde le lecteur contre une utilisation abusive des tables.

Si, au contraire, le problème n'a pas encore été résolu et que, par conséquent, il n'y a pas dans cet ouvrage de tables de valeurs numériques permettant un calcul direct du tassement, le lecteur doit lui-même faire un calcul indirect, en deux stades :

1. On calcule (également à l'aide de la théorie de l'élasticité) les contraintes dans le sol le long d'un axe vertical issu du point de la surface du sol dont on désire calculer le tassement (par exemple, le centre de la fondation).

2. Le sol, le long de cet axe, est ensuite divisé en couches (de préférence plus minces aux niveaux où les contraintes varient beaucoup et en respectant les couches naturelles). Le tassement de chaque couche est alors calculé compte tenu de ses propriétés et des contraintes qui y règnent. La somme des tassements ainsi calculés est le tassement du point considéré.

Le calcul indirect est classique et il est décrit dans tous les ouvrages de mécanique des sols. Notons seulement que si la détermination des propriétés du sol se fait à l'oedomètre (méthode courante) seule la répartition de σ_z suffit pour faire le calcul alors que si elle se fait au triaxial (méthode plus rigoureuse), il faut connaître σ_x , σ_y et σ_z .

En plus des tables permettant le calcul direct du tassement nous donnons donc, chaque fois que nous les connaissons, les valeurs des contraintes dans le sol, en vue du calcul indirect du tassement.

Il importe de remarquer que le calcul indirect est moins dangereux que le calcul direct. En effet, autant le résultat de ce dernier calcul est sensible à tout écart entre les propriétés réelles du sol et les hypothèses de calcul, autant la distribution des contraintes, utilisée pour faire le calcul indirect, est très peu sensible à la plupart des hétérogénéités courantes du sol. Les principales

exceptions sont celles d'une couche assez mince de sol très dur reposant sur des terrains plus mous (1), ce qui est fréquent, et celles de plusieurs couches identiques mais susceptibles de glisser les unes sur les autres, ce qui est plus rare.

Il est donc recommandé d'utiliser parallèlement les deux méthodes : le calcul direct (si les tables existent) permet d'avoir un premier ordre de grandeur et le calcul indirect est plus sûr (mais il comporte des risques d'erreurs dûs à la longueur du calcul). Actuellement, de trop nombreux ingénieurs, prisonniers de la tradition, ne font que le calcul indirect. Cette pratique est mauvaise car elle les prive d'un outil de travail très efficace, *le calcul direct*, qu'un peu de pratique permet de rendre également très sûr.

Dans le cas d'un sol saturé, il faut calculer d'une part le tassement instantané (avant drainage) et, d'autre part, le tassement final (après drainage). Pour une fondation donnée, ces deux calculs se font à l'aide de la même formule où seules changent les valeurs de E et ν :

- avant drainage : E_u et ν_u ,
- après drainage : E' et ν' .

Les tables ne permettent pas le calcul de l'évolution du tassement en fonction du temps : elles ne donnent que les valeurs initiale et finale du tassement.

Enfin, signalons un point particulièrement important. Lorsque la base de la fondation est située à une profondeur D (Fig. 1) on montre que, du point de vue du tassement, tout se passe (avec une bonne approximation) comme si la surface du sol était arasée au niveau de la base de la fondation et que la charge exercée était diminuée de la pression des terres enlevées (Fig. 6) :

$$p = \frac{F}{S} - \gamma D$$

(1) Nous avons traité cette question en détail dans "Commentaires sur l'utilisation de l'élasticité pour les projets de fondations", 4^e Congrès Brésilien de Mécanique des Sols et Fondations, Vol. 1, tome 2, 5 (Guanabra, 3-8 août 1970), 1-9. Le texte de cette communication est reproduit dans la revue *Technique des Travaux*, 331 (septembre-octobre 1971), 264-266.

avec :

- p : pression utilisée dans le calcul du tassement,
- F : charge exercée par la fondation sur le sol,
- S : surface de la fondation,
- γ : poids volumique du sol,
- D : profondeur de la base de la fondation.

La première de ces deux remarques n'est, bien entendu, vraie que si D/B reste petit (voir § 1 de cette introduction). Elle justifie que dans tous les cas de tassement envisagés (Chap. 2 à 6) la profondeur D de la base de la fondation n'intervienne pas (1).

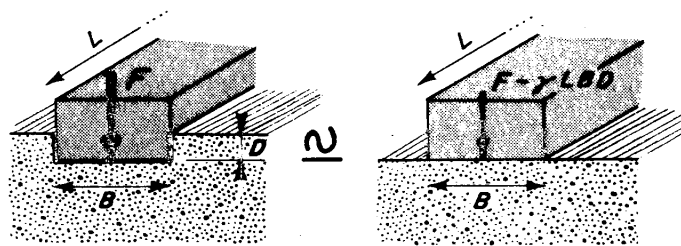


FIG. 6. — Le tassement d'une fondation enfoncée de D (Condition des fondations superficielles : D/B petit) et exerçant une charge de résultante F est généralement considéré comme égal à celui d'une fondation reposant sur le sol arasé à la profondeur D et exerçant la charge $F - \gamma LBD$ (γ : poids volumique moyen du sol enlevé).

(1) Nous avons traité cette question en détail dans "Influence de la géométrie de la fondation sur le calcul des tassements", 4^e Congrès Brésilien de Mécanique des Sols et Fondations, Vol. 1, tome 2, 5 (Guanabara, 3-8 août 1970), 10-16. Le texte de cette communication est reproduit dans la revue *Technique des Travaux*, n° 333 (janvier-février 1972), 25-26.

6. ETENDUE DES CAS ENVISAGES

Trente-cinq sections sont consacrées aux calculs de tassement et treize aux calculs de force portante. En plus des tables que nous avons établies, et qui constituent la majeure partie de l'ouvrage, nous reproduisons des résultats publiés par d'autres et qui nous paraissent intéressants. Bien que nous ayons eu connaissance de la quasi-totalité des travaux publiés à ce jour sur cette question, cet ouvrage est incomplet car de nombreux problèmes n'ont pas encore reçu de solution satisfaisante. Nous n'avons retenu que les solutions rigoureuses sur le plan théorique et exactes numériquement. Pour contrôler les résultats numériques, il nous a suffi souvent de tracer des courbes qui faisaient apparaître l'incohérence des valeurs numériques. Ceci s'est produit notamment pour des résultats obtenus par des méthodes numériques directes (*double-grille* (1) ou *éléments finis*) : il nous a semblé que certains auteurs étaient beaucoup plus intéressés par l'élégance de la méthode de résolution, considérée comme une fin en soi, que par l'exactitude des résultats.

Un autre moyen de contrôle est la compatibilité des résultats fournis par deux sections différentes. Nous avons vérifié, par exemple que :

- lorsque la longueur d'une fondation rectangulaire tend vers l'infini, les valeurs tabulées tendent vers celles obtenues, par ailleurs, pour les fondations de longueur infinie ;
- les résultats relatifs aux sols composés de trois couches tendent vers ceux des sols composés de deux couches, puis d'une seule couche, lorsque les propriétés de deux puis de trois couches sont identiques ;
- le principe de Saint-Venant est bien respecté par toutes les charges, quelle que soit leur répartition à la surface du sol, pourvu qu'elles aient même résultante ;
- les résultats relatifs aux charges inclinées et aux sols inclinés tendent respectivement, vers ceux des charges normales ou des sols horizontaux lorsque ces inclinaisons deviennent nulles.

(1) Méthode connue sous le nom anglais de "*lumped-parameters*".

Au total une grande quantité de contrôles ont été faits ce qui nous a permis de corriger — ou d'éliminer — tout résultat suspect. Malgré cela, certaines erreurs peuvent encore subsister, et nous serions heureux que l'on veuille bien nous les signaler.

Ceci étant dit, sans vouloir refaire la table des matières, essayons de cerner l'étendue des cas envisagés. Il convient de distinguer les paramètres relatifs à la charge et ceux relatifs au sol. Pour le tassement :

- en ce qui concerne la charge, les paramètres considérés sont la *forme de la surface d'application* (charge concentrée, circulaire, rectangulaire, de forme quelconque et de grande longueur), l'*inclinaison* (certaines sections sont limitées aux charges normales mais beaucoup de cas de charges inclinées sont examinés), la *distribution des contraintes au contact de la fondation et du sol* (uniforme, linéaire, triangulaire, trapézoïdale, parabolique et non imposée dans le cas des fondations rigides), la *rigidité de la fondation* (dans la plupart des cas, la distribution de la charge est imposée, mais dans certains cas, la fondation est rigide) ;
- en ce qui concerne le sol, les cas envisagés sont : sol homogène sur une épaisseur infinie, couche homogène reposant sur un substratum indéformable, sols composés de deux et trois couches, sol dont le module augmente linéairement avec la profondeur.

Pour la force portante :

- en ce qui concerne la charge, l'influence de la forme de la surface d'application n'a pas pu être prise en compte, comme il est dit plus haut (§ 4 de cette Introduction) et toutes les fondations considérées sont rigides, ce qui exclut les remblais ; le seul paramètre examiné est l'*inclinaison* et l'*excentrement* de la charge ;
- en ce qui concerne le sol, les paramètres considérés sont sa *composition* (homogène, finement stratifié, couche homogène reposant sur un substratum indéformable, sol composé de deux couches) et la *géométrie de sa surface* (horizontale, horizontale mais avec dénivelée de part et d'autre de la fondation, inclinée).

Bien que le nombre de cas traités soit déjà important, beaucoup reste encore à faire, tant pour l'étude du tassement (*fondations rigides, remblais, sols*

anisotropes, à surface inclinée, formés de plusieurs couches, en particulier quand la couche superficielle est la moins déformable...) que pour l'étude de la force portante (*influence de la forme de la fondation, sols composés de plusieurs couches...*).

7. LA PRESENTATION DES TABLES

La psychologie de l'ingénieur pressé de résoudre un problème et ouvrant un livre de tables est analogue à celle de l'automobiliste pénétrant dans un échangeur autoroutier. Le temps qu'il peut consacrer à la recherche est extrêmement limité et si la signalisation n'est pas claire il préférera, faute de trouver sa voie immédiatement, reprendre la route ancienne dont il a l'habitude.

Ainsi, rien ne servirait de posséder des tables très complètes s'il fallait plus de temps pour s'y retrouver que pour employer les méthodes traditionnelles de calcul. Nous avons donc apporté beaucoup de soin à la présentation matérielle de cet ouvrage.

— découpage (1).

Cet ouvrage est divisé en huit chapitres. Le premier regroupe un certain nombre de généralités, les cinq suivants sont consacrés au calcul du tassement et les deux derniers au calcul de la force portante. En fait, hormis le chapitre des généralités, l'ouvrage est divisé en deux parties, la première relative au calcul du tassement comprend cinq chapitres, la seconde qui concerne le calcul de la force portante ne comprend que deux chapitres. Il est à souhaiter que dans les années à venir des progrès importants soient faits dans l'étude de la force portante et que, dans une prochaine édition, la deuxième partie de cet ouvrage s'étoffe au point de comporter autant de chapitres que la première.

Chaque chapitre comprend plusieurs sections. Toutes les sections sont indépendantes ce qui permet au lecteur de se reporter directement à la section qui l'intéresse et ce qui facilitera la remise à jour de ces tables par adjonction de nouvelles sections. Chaque section comprend des résultats présentés sous forme de tables et de graphiques et un texte d'accompagnement.

(1) Voir la table des matières p. XV.

— le texte.

Le texte de chaque section est extrêmement bref, donnant simplement les hypothèses, les formules, des exemples et quelques recommandations visant à éviter l'utilisation abusive des résultats. Ainsi, pour résoudre un problème donné, il suffit de lire quelques pages au plus. Ce texte ne comprend aucune justification théorique mais le lecteur désireux de savoir comment ont été établis les résultats donnés peut consulter les publications originales dont la référence est donnée à la fin de chaque section.

Quoique bref, ce texte est très détaillé, trop penseront certains. Mais nous avons voulu essayer de n'omettre aucune précision pratique, estimant qu'il est plus facile à un ingénieur expérimenté de sauter les trois lignes qui lui paraissent trop évidentes qu'à un débutant de les inventer.

— les tables et graphiques.

Les formules sont toujours écrites à l'aide de coefficients sans dimensions, ce qui permet leur utilisation avec tout système d'unités. Les résultats numériques importants sont donnés à la fois dans une table et un graphique situés côte à côte. Les autres résultats sont donnés soit sous forme de table soit sous forme de graphique.

Tables et graphiques ne comportent pratiquement jamais d'indications en langage afin de pouvoir être utilisés par ceux qui ne comprennent pas la langue du texte. Nous avons, dans la mesure du possible, disposé horizontalement les abscisses, largeurs... et verticalement les tassements, profondeurs, épaisseurs de couches... Ceci facilite le travail de l'utilisateur mais nous a conduit à modifier la présentation de bien des résultats fournis par d'autres auteurs.

Enfin, l'expression analytique des coefficients est donnée, lorsqu'elle existe, afin de permettre aux utilisateurs de calculer certaines valeurs ne se trouvant pas dans les tables.

8. LES UNITES

Comme nous l'avons dit plus haut, les résultats numériques étant donnés sous forme adimensionnelle, les formules indiquées dans le texte sont valables quel que soit le système d'unités.

Pour les exemples d'applications numériques, nous utilisons parallèlement le système international (S.I.) et le système britannique. Les valeurs exprimées dans ce dernier système sont données entre parenthèses. Par exemple, nous écrivons $p = 2.3$ bars (4 800 lb/sq.ft.) et non pas 2.3 bars = 4 800 lb/sq.ft. car les résultats exprimés dans les deux systèmes sont arrondis. Une correspondance exacte entre les deux systèmes aurait fait apparaître des décimales tout à fait ridicules pour un problème de Mécanique des Sols, comme cela se voit dans certains ouvrages traduits trop exactement.

Nous utilisons donc les unités suivantes :

- Forces : newtons, N (livres, lb) et nous donnons souvent la valeur correspondante en tonnes (autrement dit, la masse qui, placée dans le champ de la pesanteur terrestre, exercerait la force donnée).
- Longueurs, tassements : mètres, m (pieds, ft) et les sous-multiples, centimètres, cm (pouces, in).
- Pressions, contraintes : pascal = newton/m^2 , mais cette unité étant beaucoup trop petite nous utilisons son multiple le bar qui vaut 10^5 pascals (dans le système britannique nous utilisons la livre par pied carré, lb/sq.ft, ou quelquefois, la livre par pouce carré, p.s.i. ainsi que la tonne par pied carré, ton/sq.ft). Nous donnons enfin quelquefois la valeur correspondante en kg/cm^2 (unité dérivée du système M.K_p.S).
- Poids volumiques : en toute rigueur, il faudrait donner leur valeur en newton/m^3 (S.I.). Nous avons préféré donner leur valeur en g/cm^3 (unité dérivée du système M.K_p.S) car cette unité est le millième de l'unité kg/m^3 utilisée en S.I. pour la masse volumique. Ainsi, nous utilisons sans le dire la masse volumique au lieu du poids volumique et cet usage tend à se généraliser (dans le système britannique, nous utilisons la livre par pied cube, lb/cu.ft).

On trouvera dans le chapitre Généralités des tables de conversion pour les unités de longueur, force, contraintes-pression, force par unité de longueur, poids volumiques - masses volumiques.

9. NOTATIONS

Dans un ouvrage où près d'un millier de symboles différents sont utilisés, le choix des notations posait un problème délicat, en particulier pour les coef-

ficients sans dimensions. Le principe a été de choisir des *notations logiques tout en respectant certaines habitudes des ingénieurs et simples tout en étant, par le jeu des indices, adaptées à chaque cas particulier.*

Toutes les notations utilisées dans une formule sont définies immédiatement après : ceci se traduit par un nombre considérable de répétitions fastidieuses pour l'auteur mais très utiles pour le lecteur à qui l'on évite ainsi beaucoup de temps perdu. On trouvera cependant à la p. XXI une liste des principales notations.

Pour la force portante (Chap. 7 et 8), les notations sont très simples, les trois coefficients N_c , N_q et N_γ correspondent au cas d'une fondation à charge normale centrée sur un sol horizontal, lorsqu'ils sont écrits tels quels et à des cas plus compliqués lorsqu'ils sont affectés d'un ou de plusieurs des indices suivants :

- δ : charge inclinée,
- β : sol incliné,
- ω : base de la fondation inclinée,
- H : une couche de sol sur un substratum rigide,
- 2 H : deux couches de sol,
- $^\circ$ (en indice supérieur) : angle de frottement nul,
- * (en indice supérieur) : sol anisotrope,
- (en indice supérieur) : sol finement stratifié.

Par ailleurs la barre placée sous le coefficient indique que le contact entre le sol et le substratum se fait sans frottement. Enfin, on trouve les coefficients N_{cq} et $N_{\gamma c}$ qui regroupent, respectivement, $N_c - N_q$ et $N_\gamma - N_c$, dans certains cas particuliers.

Pour le tassement (Chap. 2 à 6), la multiplicité des cas fait que les notations sont plus compliquées. Donnons simplement quelques principes :

- Dans les cas *tridimensionnels* - charge concentrée (Chap. 2), fondations circulaires (Chap. 3), rectangulaires (Chap. 4) et de forme quelconque (Chap. 5) - les coefficients sans dimensions sont désignés par une lettre majuscule et dans les cas *bidimensionnels* - fondations de grande longueur (Chap. 6) - par une lettre minuscule.
- Les cas tridimensionnels et bidimensionnels correspondants sont désignés par le même symbole, respectivement *majuscule* et *minuscule* (par exemple P_H et p_H).

— Une barre indique que le coefficient se rapporte à une *fondation rigide* (par exemple \bar{M}_H) et les indices suivants sont fréquemment rencontrés :

- n : composante normale,
- t : composante tangentielle,
- H : une couche de sol sur un substratum rigide,
- 2 H : deux couches de sol,
- 3 H : trois couches de sol,
- m : moyen,
- 0, 1, 2, 3 : indices différenciant les coefficients pour le calcul des contraintes (1).

— L'exposant "prime" n'a pas de signification particulière ; il sert simplement à distinguer deux coefficients voisins.

10. BIBLIOGRAPHIE

Les tables et graphiques qui ne portent aucune référence sont le fruit de nos travaux personnels. Sur les autres, il est fait mention du nom de leur auteur. Nous remercions très vivement tous ceux qui ont bien voulu nous autoriser à reproduire (2) leurs résultats, MM. Boulon, Burmister, Gibson, Hank, Iyengar, Jelinek, Jones, Mandel, Meyerhof, Milovic, Newmark, Poulos, Ranke, Salençon, Scrivner, Sills, Taylor, Tournier et Ueshita. Nous espérons ne pas avoir fait d'omission dans cette liste et nous présentons d'avance nos excuses si tel n'était pas le cas.

Nous remercions également les organismes qui ont assuré une première publication de certains de nos travaux, l'Académie des Sciences de France, l'Académie des Sciences de Roumanie, l'American Society of Civil Engineers (New York), le Highway Research Board (Washington), le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (Paris), ainsi que les revues, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des

(1) Certains de ces coefficients servent au calcul de plusieurs contraintes par exemple σ_z et τ_{zx} . Il était donc impossible de leur donner des indices tels que x, z, zx... Nous avons donc choisi de prendre comme indice des chiffres dont l'ordre n'est pas quelconque mais basé sur le degré des expressions analytiques.

(2) Pour l'homogénéité de cet ouvrage il a souvent été nécessaire de modifier la présentation originale de ces résultats.

Travaux Publics, Annales des Ponts et Chaussées, Revue Général des Routes et Aéro-dromes, Le Génie Civil, Le Moniteur des Travaux Publics et du Bâtiment, Construction, Excavator, La Technique des Travaux, Technika i Gospodarka Morska, etc. C'est à partir des résultats contenus dans ces premières publications et des commentaires qu'elles ont suscités que le présent recueil a pu être établi.

A la fin de chaque section, une courte notice bibliographique permet au lecteur de retrouver les publications originales où est exposé le détail du calcul conduisant aux résultats présentés.

11. REMERCIEMENTS

Avant tout, et surtout, nous tenons à remercier les deux compagnons des longues années de travail qui ont conduit à cet ouvrage. M.A. Rabatel a été entre 1965 et 1970 notre collaborateur direct, chargé plus particulièrement des calculs numériques. Il s'est passionné pour cette tâche, n'hésitant pas à passer de longues heures à perfectionner ses programmes de calcul et à procéder à de fastidieuses vérifications. Sa conscience professionnelle est la meilleure garantie de l'exactitude des tables auxquelles il a participé. M. M. Rey a eu l'importante responsabilité de toute la partie graphique de cet ouvrage : on lui doit la qualité de la présentation des tables et la clarté des dessins. Son rôle fut particulièrement précieux pour le tracé des graphiques de valeurs numériques où la précision de son travail permit de déceler nombre d'erreurs de tabulation. Merci à tous deux, d'avoir constitué à nos côtés cette équipe très unie.

Beaucoup d'autres personnes, à des titres divers, ont joué un rôle dans l'accomplissement de ce travail.

Un grand nombre appartiennent, ou ont appartenu, à l'Institut de Mécanique de Grenoble, autrefois connu sous le nom de Laboratoire de Mécanique des Fluides, des Solides et des Sols. Le professeur J. Kravtchenko, fondateur de cette grande maison, a droit à toute notre gratitude pour l'intérêt qu'il a toujours porté à ce travail bien qu'accaparé par des tâches très importantes, conséquences du rayonnement international de ses travaux. Qu'il nous soit permis de remercier tout particulièrement M. G. Lespinard, l'actuel directeur de l'I.M.G., qui en toutes circonstances a soutenu notre effort, tant en nous en donnant les moyens qu'en tenant à participer, et avec quelle pertinence, à certaines de nos réunions de travail.

Nous remercions également le professeur L. Santon, ancien directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble, le professeur A. Craya, président du conseil scientifique, et le professeur Ph. Le Roy, directeur adjoint de l'I.M.G., de leur intérêt pour nos recherches. L'incomparable maître à penser qu'est le professeur P. Anglès d'Auriac, à qui nous devons l'essentiel de notre formation de mécanicien, se soucie peu de remerciements formels ; il préférera, nous le savons, être assuré que demain, comme d'habitude, nous frapperons à sa porte pour lui poser un problème et l'entendre répondre avec autant d'humour que de compétence. Dans un style tout à fait différent, nous avons eu la chance extraordinaire d'être auprès du professeur J. Biarez au meilleur moment, la passion qui l'anima toujours n'était qu'enthousiasme, nous avons beaucoup rêvé, beaucoup essayé de comprendre la Mécanique des Sols, il fallait ensuite travailler et il a su alors adopter une attitude qui a été pour nous le meilleur des stimulants, ce dont nous ne le remercierons jamais assez. Comment ne pas avoir une pensée particulière pour M.G. Biguenet : nous avons tellement parlé fondations et si souvent avec des bottes aux pieds ! De nombreux chercheurs nous ont apporté leur collaboration pour l'étude des fondations, en particulier MM. J.P. Mascarelli, G. Touzot, M. Rouget, H. Wattisee, J.M. Runacher, F. Khalaf, D. Cordary et J. Garnier. Nous les remercions ainsi que, tout particulièrement, M. Tran-Vo-Nhiem et J.P. Obin qui nous ont apporté leur collaboration pour les deux chapitres consacrés à la force portante des fondations. Nous remercions également MM. M. Hajal, R. Negre, P. Stutz et M. Boulon pour de très intéressantes discussions. Merci également à Mlles G. Felix-Naix et C. Saunier et à M. P. Salomon qui nous ont aidés à recueillir l'importante documentation que nous avons consultée, à MM. J. Elberg et G. Brault pour les travaux de reprographie, souvent délicats.

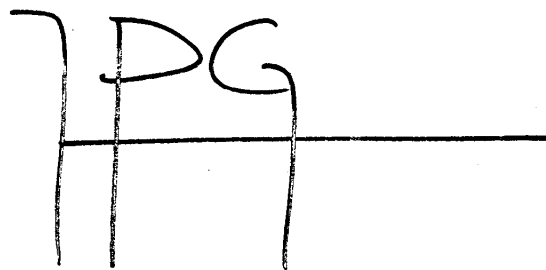
Les concours n'ont pas manqué non plus à l'extérieur de l'Institut de Mécanique de Grenoble. Ainsi, depuis longtemps, grâce à Mme Steinman, nous avons un large accès à la très riche documentation de la Société Sogreah de Grenoble. Nous sommes très reconnaissants à un grand nombre d'ingénieurs, de chercheurs, de professeurs de toutes nationalités qui ont bien voulu nous écrire, nous rencontrer et nous donner de très utiles avis sur les fondations. Nous regrettons de ne pouvoir citer tout le monde, nous bornant à nommer MM. E. Absi, M. Bachelier, J.L. Bordes, M. Cassan, P. Habib, Y. Lebegue, E. Leflaive, A.D.M. Penmann, E. Robert, F. Schlosser, Y. Tchong. Comment ne pas évoquer la très aimable visite du profes-

seur H.G. Poulos, le grand spécialiste australien des problèmes de tassement : devant se rendre de Boston à Sydney, il prit le *chemin des professeurs* pour faire escale quelques heures à Genève afin de tourner une à une les pages de ces tables qui n'étaient alors qu'à l'état de manuscrit.

Une place particulière doit être accordée à la commission dite "Groupe de Projet" désignée par le Ministre du Développement Industriel et Scientifique pour suivre les travaux de recherches sur les fondations que nous faisons à Grenoble. M. J. Pera, représentant le Ministère, et MM. L. Girousse, Ph. Ozanne et L. Parez, experts désignés pour représenter la profession du bâtiment et des travaux publics, nous font connaître, lors des réunions du Groupe de Projet, l'avis des éventuels utilisateurs de nos résultats. Ceci nous est extrêmement précieux, nous les remercions très vivement et, à travers eux, le Ministère du Développement Industriel et Scientifique pour l'aide financière qu'il a apportée à nos recherches.

Nous remercions toutes les personnes qui ont bien voulu examiner le manuscrit et nous donner d'utiles avis, notamment Messieurs J.M. Cognon, J. Ditrichstein, J. Kerisel, P. Londe, J. Pera, B. Sechet et, tout particulièrement, Messieurs P. Habib et Ph. Ozanne dont les nombreuses et pertinentes remarques témoignent d'une lecture extrêmement attentive, Monsieur L. Girousse qui a contrôlé de très nombreux exemples d'application et le professeur J. Kravtchenko qui a fait une analyse très fouillée de l'ouvrage pour le texte de présentation.

Enfin, il nous est particulièrement agréable de remercier Monsieur A. Caquot, membre de l'Institut, à double titre. D'abord, parce qu'à de nombreuses reprises il a bien voulu nous recevoir et nous donner de très précieux conseils, ensuite parce qu'il a accepté de consacrer beaucoup de son temps à la rédaction de la préface, nous faisant ainsi le grand honneur d'associer son nom à la parution de ces tables.



GRENOBLE

Janvier 1972

1-1

1-2

1-3

1-4

1-5

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

Conversion d'unités	Section 1-1
Formulaire de mécanique des milieux continus	Section 1-2
Formulaire d'élasticité linéaire	Section 1-3
Formulaire de plasticité	Section 1-4
Ordres de grandeur des caractéristiques du sol	Section 1-5

SECTION 1-1

CONVERSION D'UNITÉS**SOMMAIRE**

- Exemples d'utilisation des tableaux
- Conversion des longueurs
- Tableau de conversion des contraintes
- Tableau de conversion des forces
- Tableau de conversion des forces par unité de longueur
- Tableau de conversion des poids volumiques

UNITES DE MESURE DES CONTRAINTES

Valeur exprimée en :

de ↓	Système usuel FRANÇAIS								
	SI	et dérivés			CGS				
	Pascal Newton/m ² Pa	Bar Hectopièze	Millibar mb	Pièze Sthène/m ² pz	Barye Dyne/cm ²	kg/cm ²	mètre d'eau t/m ²	mm d'eau kg/m ²	kg/mm ²
Pascal	1	10 ⁻⁵	10 ⁻²	10 ⁻³	10	1,02.10 ⁻⁵	1,02.10 ⁻⁴	0,102	1,02.10 ⁻⁷
Bar	10 ⁵	1	10 ³	10 ²	10 ⁶	1,02	10,2	10 200	0,0102
Millibar	100	10 ⁻³	1	0,1	10 ³	1,02.10 ⁻³	0,0102	10,2	1,02.10 ⁻⁵
Pièze	10 ³	10 ⁻²	10	1	10 ⁴	0,0102	0,102	102	1,02.10 ⁻⁴
Barye	0,1	10 ⁻⁶	10 ⁻³	10 ⁻⁴	1	1,02.10 ⁻⁶	1,02.10 ⁻⁵	0,0102	1,02.10 ⁻⁸
kg/cm ²	9,81.10 ⁴	0,981	981	98,1	9,81.10 ⁵	1	10	10 ⁴	10 ⁻²
t/m ²	9,81.10 ³	0,0981	98,1	9,81	9,81.10 ⁴	0,1	1	10 ³	10 ⁻³
kg/m ²	9,81	9,81.10 ⁻⁵	0,0981	9,81.10 ⁻³	98,1	10 ⁻⁴	10 ⁻³	1	10 ⁻⁶
kg/mm ²	9,81.10 ⁶	98,1	9,81.10 ⁴	9,81.10 ³	9,81.10 ⁷	100	10 ³	10 ⁶	1
p.s.i.	6 897	0,06897	68,97	6,897	68,97.10 ³	0,07035	0,7035	703,5	7,035.10 ⁻⁴
p.s.f.	47,9	47,9.10 ⁻⁵	0,479	0,0479	479	4,882.10 ⁻⁴	4,882.10 ⁻³	4,882	4,882.10 ⁻⁶
t.s.f.	10,73.10 ⁴	1,073	1 073	107,3	10,73.10 ⁵	1,094	10,94	10 940	0,01094
t _s .s.f.	95 790	0,9579	957,9	95,79	95,79.10 ⁴	0,9771	9,771	9 771	9,771.10 ⁻³
atm.	101 325	1,01325	1 013,25	101,325	1 013 250	1,033	10,33	10 330	0,01033
cm d'eau	98,10	9,81.10 ⁻⁴	0,981	9,81.10 ⁻²	981	10 ⁻³	10 ⁻²	10	10 ⁻⁵
ft of Water	2 990	0,0299	29,9	2,99	29 900	0,03048	0,3048	304,8	3,048.10 ⁻⁴
Torrucelli	133,4	1,334.10 ⁻³	1,334	0,1334	1 334	0,00136	0,0136	13,6	1,36.10 ⁻⁵
cm.Hg	1 334	0,01334	13,34	1,334	13 340	0,0136	0,136	136	1,36.10 ⁻⁴
in. Hg	3 388,4	0,03384	33,884	3,3884	33 884	0,0345	0,345	345	3,45.10 ⁻⁴

EXEMPLES D'UTILISATION DES TABLEAUX

Exemple 1 :

Quelle est la valeur de 0,3 bar en pascals (newton/m²), en p.s.i. et en lb/sq.ft ?

$$\begin{aligned}
 0,3 \text{ bar} &= 0,3 \times 10^5 = 30\,000 \text{ newtons/m}^2 \\
 &= 0,3 \times 14,50 = 4,35 \text{ p.s.i.} \\
 &= 0,3 \times 2\,088 = 626 \text{ lb/sq.ft.}
 \end{aligned}$$

Exemple 2 :

Quelle est la valeur de 2 500 lb en tonnes ?

$$2\,500 \text{ lb} = 2\,500 \times 0,4536 \times 10^{-3} = 1,14 \text{ t.}$$

Système BRITANNIQUE				Unités Diverses					
lb/sq. in.	lb/sq. ft	ton/sq. ft	ton short/ sq. ft	atmosphère normale	centimètre d'eau	pied d'eau	Torrucelli mm Hg	centimètre de mercure	pouce de mercure
p.s.i.	p.s.f.	t.s.f.	t _s .s.f.	atm.	cm d'eau	ft of Water	Torr	cm.Hg	in. Hg
$14,50 \cdot 10^{-5}$	0,02088	$93,26 \cdot 10^{-7}$	$1,044 \cdot 10^{-5}$	$98,69 \cdot 10^{-7}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$	$3,3466 \cdot 10^{-4}$	$75 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$2,953 \cdot 10^{-4}$
14,50	2 088	0,9326	1,044	0,9869	1 020	33,466	750	75	29,53
$14,50 \cdot 10^{-3}$	2,088	$93,26 \cdot 10^{-5}$	$1,044 \cdot 10^{-3}$	$98,69 \cdot 10^{-5}$	1,02	0,033466	0,75	0,075	0,02953
0,145	20,88	$93,26 \cdot 10^{-4}$	0,01044	$98,69 \cdot 10^{-4}$	10,2	0,33466	7,5	0,75	0,2953
$14,50 \cdot 10^{-6}$	$20,88 \cdot 10^{-4}$	$93,26 \cdot 10^{-8}$	$1,044 \cdot 10^{-6}$	$98,69 \cdot 10^{-8}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$3,3466 \cdot 10^{-5}$	$75 \cdot 10^{-5}$	$75 \cdot 10^{-6}$	$2,953 \cdot 10^{-5}$
14,225	2 048,4	0,9145	1,0242	0,9681	10^3	32,81	735,3	73,53	28,96
1,4225	204,84	0,09145	0,10242	0,09681	100	3,281	73,53	7,353	2,896
$1,4225 \cdot 10^{-3}$	0,20484	$91,45 \cdot 10^{-6}$	$1,0242 \cdot 10^{-4}$	$9,681 \cdot 10^{-5}$	0,1	$3,281 \cdot 10^{-3}$	0,07353	$7,353 \cdot 10^{-3}$	$2,896 \cdot 10^{-3}$
1 422,5	$20,484 \cdot 10^4$	91,45	102,42	96,81	10^5	3281	$7,353 \cdot 10^4$	7 353	2 896
1	144	0,06429	0,072	0,06805	70,35	2,308	51,728	5,1728	2,037
$6,945 \cdot 10^{-3}$	1	$44,643 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4,726 \cdot 10^{-4}$	0,4882	0,01603	0,3592	0,03592	0,01414
15,557	2 240	1	1,12	1,0588	1 094	35,894	804,42	80,442	31,67
13,89	2 000	$89 286 \cdot 10^{-5}$	1	0,9452	977,1	32,06	718,46	71,846	28,286
14,69	2 115,6	0,9445	1,0578	1	1 033	33,89	760	76	29,92
$1,4225 \cdot 10^{-2}$	2,048	$9,1446 \cdot 10^{-6}$	$1,0242 \cdot 10^{-3}$	$9,68 \cdot 10^{-4}$	1	0,03281	0,7353	0,07353	0,02895
0,43355	62,43	$27,87 \cdot 10^{-3}$	0,031215	0,0295	30,48	1	22,412	2,2412	0,8824
0,01934	2,785	$1,243 \cdot 10^{-3}$	$1,3925 \cdot 10^{-3}$	$1,316 \cdot 10^{-3}$	1,36	0,04462	1	0,1	0,03937
0,1934	27,85	0,01243	0,013925	0,01316	13,6	0,4462	10	1	0,3937
0,491	70,704	0,03156	0,035352	0,03342	34,5	1,1333	25,4	2,54	1

Exemple 3 :

Quel est l'équivalent en livres par pied de 6 tonnes par mètre ?

$$6 \text{ t/m} = 6 \times 672 = 4 032 \text{ lb/ft.}$$

Exemple 4 :

Quel est l'équivalent en g/cm^3 de 128 lb/cu.ft ?

$$128 \text{ lb/cu.ft} = 128 \times 0,016 = 2,05 \text{ g/cm}^3.$$

CONVERSION DES LONGUEURS

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 3,28 \text{ ft,}$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in} = 0,305 \text{ m} = 30,48 \text{ cm,}$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm.}$$

UNITES DE MESURE DES FORCES

Valeur de →	SI et dérivés		CGS	Système usuel FRANCAIS				Système BRITANNIQUE		
	kgxm/s ² Newton N	10kgxm/s ² décanewton da N		Sthène	gxm/s ² gramme/force g f	kgxm/s ² k gramme/force kg f	t×9,8lm/s ² tonne force t f	Livre lb	sh ton (2 Kip)	ton
Newton	1	0,1	10 ⁵	0,102.10 ³	0,102	0,102.10 ⁻³	0,225	0,1124.10 ⁻³	1,003.10 ⁻⁴	
decanewton	10	1	10 ⁶	1,020.10 ³	1,02	1,02.10 ⁻³	2,25	1,124.10 ⁻³	1,003.10 ⁻³	
Sthène	10 ³	10 ²	10 ⁸	1,02.10 ⁵	1,02.10 ²	0,102	225	0,1124	0,1003	
Dyne	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	1	1,02.10 ⁻³	1,02.10 ⁻⁶	1,02.10 ⁻⁹	2,25.10 ⁻⁶	1,124.10 ⁻⁹	1,003.10 ⁻⁹	
gramme force	9,81.10 ⁻³	9,81.10 ⁻⁴	981	1	10 ⁻³	10 ⁻⁶	2,2046.10 ⁻³	1,1.10 ⁻⁶	0,9842.10 ⁻⁶	
kilogramme force	9,81	0,981	9,81.10 ⁵	10 ³	1	10 ⁻³	2,2046	1,1.10 ⁻³	0,9842.10 ⁻³	
tonne force	9 810	981	9,81.10 ⁸	10 ⁶	10 ³	1	2,2046.10 ³	1,1	0,9842	
livre	4,45	0,445	44,5.10 ⁻⁴	453,6	0,4536	0,4536.10 ⁻³	1	0,5.10 ⁻³	0,446.10 ⁻³	
short ton = 2 kip	8 900	890	89.10 ⁷	907.10 ³	0,907.10 ³	0,907	2 000	1	0,893	
ton	9 970	997	99,7.10 ⁷	1 016.10 ³	1 016	1,016	2 240	1,120	1	

UNITES DE MESURE DES FORCES PAR UNITE DE LONGUEUR

Valeur de ↓	SI et dérivés		Système britannique			Système français	
	N/m	da N/m	lb/ft	kip/ft	ton/ft	t/m	kg/m
Newton/mètre	1	0,1	0,0685	$0,685 \cdot 10^{-4}$	$0,31 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-4}$	0,102
Decanewton/mètre	10	1	0,685	$0,685 \cdot 10^{-3}$	$0,31 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	1,02
Livre/pied	14,6	1,46	1	10^{-3}	$0,446 \cdot 10^{-3}$	$1,49 \cdot 10^{-3}$	1,49
Kilolivre/pied	14 600	1 460	1 000	1	0,446	1,49	1 488
Ton/pied	32 185	3 218,5	2 240	2,24	1	3,28	3 281
Tonne/mètre	9 810	981	672	0,672	0,3048	1	1 000
Kilo/mètre	9,81	0,981	0,672	$0,672 \cdot 10^{-3}$	$0,3048 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	1

UNITES DE MESURE DES POIDS VOLUMIQUES

	SI et dérivés		Système britannique												Système français	
	N/m ³	dyne/cm ³	Oz/cu. in.	Oz/cu. ft	lb/cu. in.	lb/cu. ft	lb/cu. yd	ton/cu. ft	ton/cu. yd	lb/imp. gallon	lb/U.S. gallon	kg/m ³	g/cm ³			
Newton/m ³	1	0,1	5,9.10 ⁻⁵	0,102	3,7.10 ⁻⁶	6,37.10 ⁻³	0,172	2,8.10 ⁻⁶	7,68.10 ⁻⁵	1,02.10 ⁻³	8,5.10 ⁻⁴	0,102	1,02.10 ⁻⁴			
Dyne/cm ³	10	1	5,9.10 ⁻⁴	1,02	3,7.10 ⁻⁵	6,37.10 ⁻²	1,72	2,8.10 ⁻⁵	7,68.10 ⁻⁴	1,02.10 ⁻²	8,5.10 ⁻³	1,02	1,02.10 ⁻³			
Oz/cu. in.	16 952	1 695	1	1 728	0,0625	108	2 916	0,0482	1,302	17,34	14,4375	1 728	1,728			
Oz/cu. ft	9,81	0,981	5,787.10 ⁻⁴	1	3,6.10 ⁻⁵	0,0625	1,6875	2,79.10 ⁻⁵	7,53.10 ⁻⁴	0,01	8,355.10 ⁻³	1	10 ⁻³			
lb/cu. in.	271 227	27 123	16	27 648	1	1 728	46 656	0,771	20,83	277,42	231	27 648	27,648			
lb/cu. ft	156,96	15,696	9,259.10 ⁻³	16	5,787.10 ⁻⁴	1	27	4,464.10 ⁻⁴	0,012	0,161	0,1337	16	0,016			
lb/cu. yd	5,81	0,581	3,429.10 ⁻⁴	0,593	2,14.10 ⁻⁵	0,037	1	1,65.10 ⁻⁵	4,464.10 ⁻⁴	5,946.10 ⁻³	4,951.10 ⁻³	0,593	5,93.10 ⁻⁴			
ton/cu. ft	351 590	35 159	20,74	35 840	1,296	2 240	60 480	1	27	359,7	299,5	35 840	35,84			
ton/cu. yd	13 022	1 302	0,768	1 327,4	0,048	82,96	2 240	0,037	1	13,32	11,09	1 327,4	1,3274			
lb/imp. gallon	978,9	97,89	0,0577	100	3,60.10 ⁻³	6,23	168	2,78.10 ⁻³	0,075	1	0,83267	100	0,1			
lb/U.S. gallon	1 175,2	117,52	6,93.10 ⁻²	119,7	4,33.10 ⁻³	7,48	202	3,34.10 ⁻³	9,02.10 ⁻²	1,198	1	119,8	0,1198			
kg/m ³	9,81	0,981	5,787.10 ⁻⁴	1	3,6.10 ⁻⁵	6,25.10 ⁻²	1,6875	2,79.10 ⁻⁵	7,53.10 ⁻⁴	0,01	8,355.10 ⁻³	1	10 ⁻³			
g/cm ³	9 810	981	0,5787	1 000	0,036	62,5	1 687,5	0,0279	0,753	10	8,355	1 000	1			

FORMULAIRE DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS**SOMMAIRE**

- Conventions de signe.
- Transformation du vecteur déplacement dans un changement d'axes de coordonnées.
- Transformation d'un tenseur contrainte ou déformation dans un changement d'axes de coordonnées.
- Définition du tenseur de déformation.
- Relations de compatibilité.
- Equations de l'équilibre indéfini.

CONVENTIONS DE SIGNE

Les conventions suivantes sont valables pour tout trièdre trirectangle de sens direct (donc, notamment, pour les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques).

- Contraintes :

- Une contrainte normale de compression est positive.
- Une contrainte tangentielle, exercée sur une coupe de normale intérieure parallèle à un axe de coordonnées et de même sens, est positive si elle est de même sens qu'un axe de coordonnées (Fig. 1).

- Déplacements :

- Une composante d'un déplacement est positive si elle est de même sens que l'axe parallèle.

- Déformations :

- Une composante normale de la déformation est positive si elle traduit un allongement.
- Une composante tangentielle de la déformation est positive si elle traduit une diminution de l'angle initialement droit (Fig. 2).

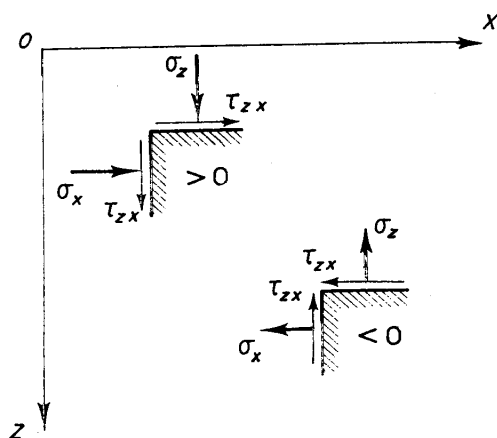


FIG. 1. - Conventions de signe des contraintes.

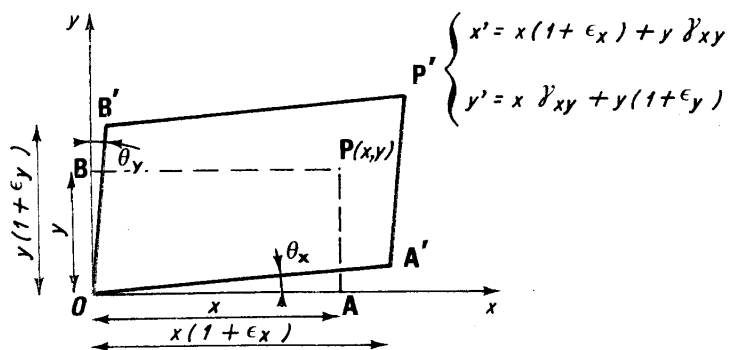


FIG. 2. - Définition des déformations.

TRANSFORMATION DU VECTEUR DEPLACEMENT DANS UN CHANGEMENT D'AXES DE COORDONNEES

(Fig. 3 a : Coordonnées cartésiennes.

Fig. 3 b : Coordonnées polaires.

Fig. 3 c : Coordonnées sphériques.)

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta$$

$$v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta$$

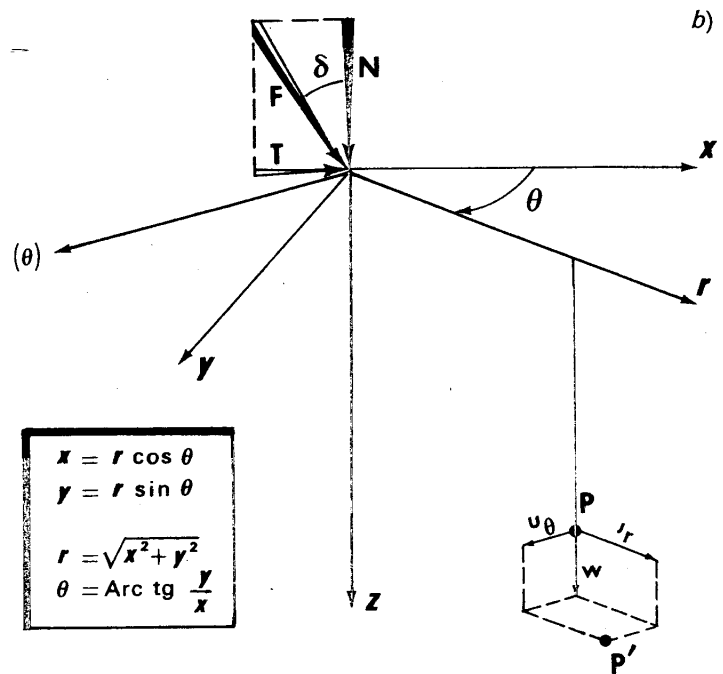
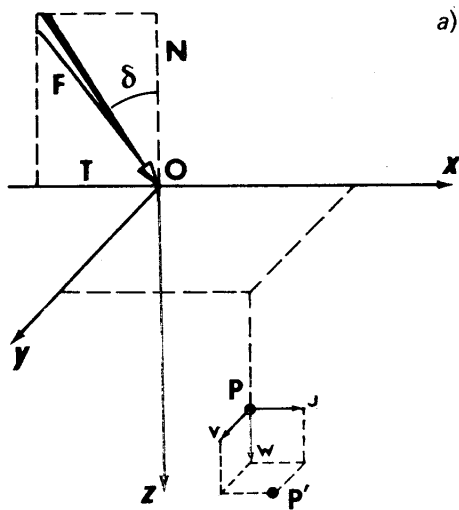
$$w = u_\rho \cos \psi - u_\psi \sin \psi$$

$$u_r = u \cos \theta + v \sin \theta$$

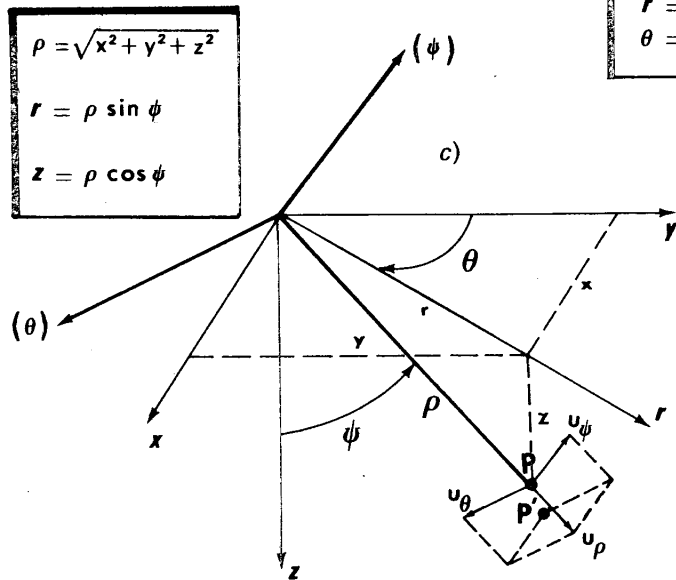
$$u_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta$$

$$u_\rho = w \cos \psi + u_r \sin \psi$$

$$u_\psi = -w \sin \psi + u_r \cos \psi$$



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \text{Arc tg } \frac{y}{x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ r &= \rho \sin \psi \\ z &= \rho \cos \psi \end{aligned}$$

FIG. 3. - Vecteur déplacement en coordonnées : a) cartésiennes ; b) cylindriques ; c) sphériques.

TRANSFORMATION D'UN TENSEUR CONTRAINTE OU DEFORMATION
DANS UN CHANGEMENT D'AXES DE COORDONNEES

Les expressions suivantes sont données pour un tenseur contrainte. On en déduit les expressions correspondantes pour un tenseur déformation en remplaçant σ par ϵ et τ par γ .

Passage des coordonnées cartésiennes (Fig. 4 a) aux coordonnées cylindriques (Fig. 4 b) :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_z = \sigma_z$$

$$\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{yz} \cos \theta - \tau_{zx} \sin \theta$$

$$\tau_{zr} = \tau_{zx} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta$$

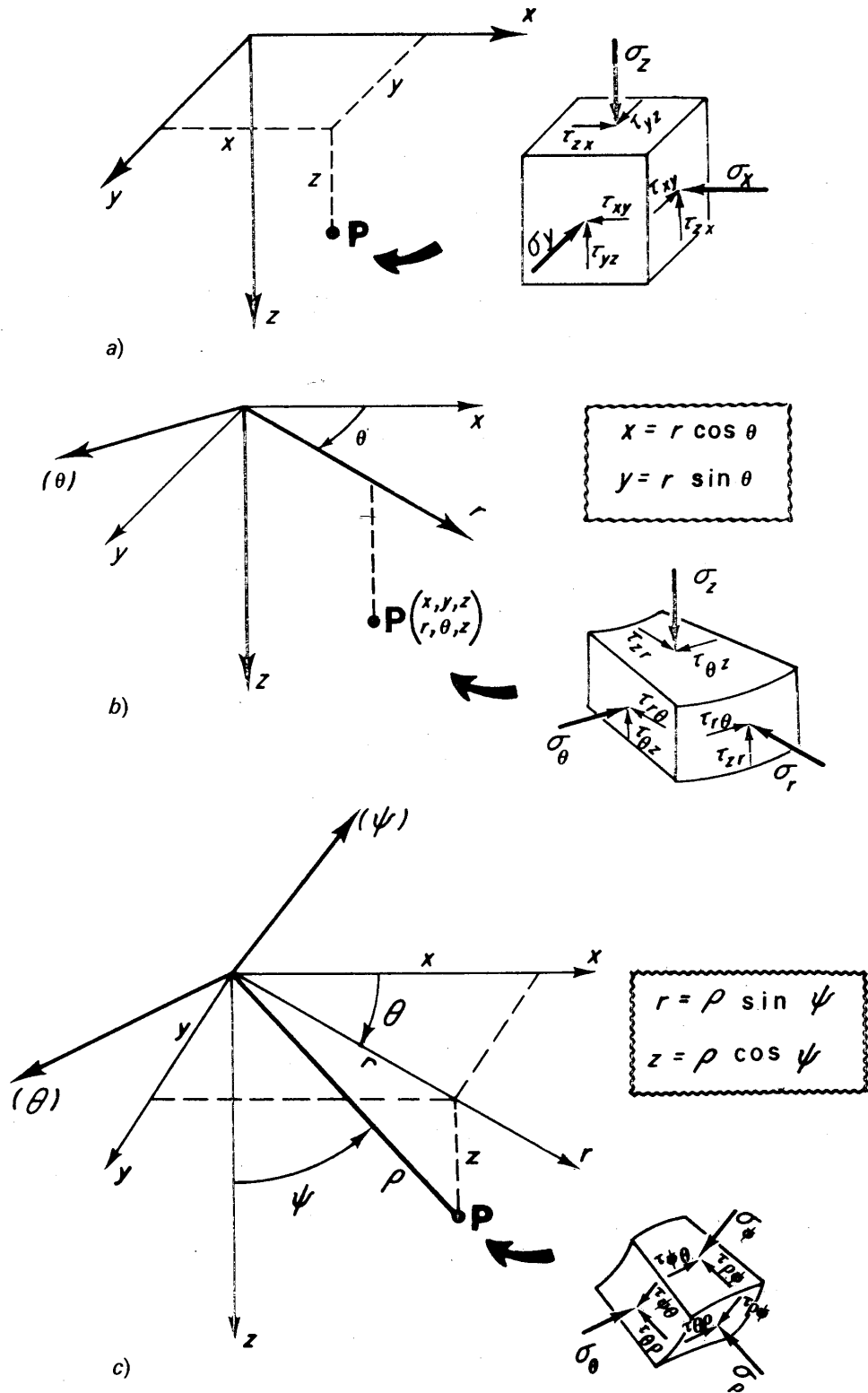


FIG. 4. — Tenseur contraintes en coordonnées : (a) cartésiennes ; (b) cylindriques ; (c) sphériques.

Passage des coordonnées cartésiennes (Fig. 4 a) aux coordonnées sphériques (Fig. 4 c) :

$$x = \rho \sin \psi \cos \theta \quad y = \rho \sin \psi \sin \theta \quad z = \rho \cos \psi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\sigma_\psi = (\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta) \cos^2 \psi + \\ + \sigma_z \sin^2 \psi - (\tau_{zx} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta) \sin 2\psi$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_\rho = (\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta) \sin^2 \psi + \\ + \sigma_z \cos^2 \psi + (\tau_{zx} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta) \sin 2\psi$$

$$\tau_{\psi\theta} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta \cos \psi + \\ + \tau_{xy} \cos 2\theta \cos \psi - (\tau_{yz} \cos \theta - \tau_{zx} \sin \theta) \sin \psi$$

$$\tau_{\theta\rho} = [(\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos 2\theta] \sin \psi - \\ - (\tau_{zx} \sin \theta - \tau_{yz} \cos \theta) \cos \psi$$

$$\tau_{\rho\psi} = (\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta) \sin \psi \cos \psi - \\ - \sigma_z \sin \psi \cos \psi + (\tau_{zx} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta) \cos 2\psi.$$

Passage des coordonnées cylindriques (Fig. 4 b) aux coordonnées sphériques (Fig. 4 c) :

$$r = \rho \sin \psi = z \operatorname{tg} \psi$$

$$\sigma_\psi = \sigma_r \cos^2 \psi + \sigma_z \sin^2 \psi - \tau_{zr} \sin 2\psi$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta$$

$$\sigma_\rho = \sigma_r \sin^2 \psi + \sigma_z \cos^2 \psi + \tau_{zr} \sin 2\psi$$

$$\tau_{\psi\theta} = \tau_{r\theta} \cos \psi - \tau_{\theta z} \sin \psi$$

$$\tau_{\theta\rho} = \tau_{r\theta} \sin \psi - \tau_{zr} \cos \psi$$

$$\tau_{\rho\psi} = (\sigma_r - \sigma_z) \sin \psi \cos \psi + \tau_{zr} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi).$$

DEFINITION DU TENSEUR DEFORMATION

(Petites déformations)

- Coordonnées cartésiennes :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

- Coordonnées cylindriques :

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{\rho \sin \psi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\psi}{\rho} \cotg \psi + \frac{u_\rho}{\rho}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right).$$

— Coordonnées sphériques :

$$\varepsilon_{\psi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\psi}}{\partial \psi} + \frac{u_{\rho}}{\rho}$$

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho}$$

$$\gamma_{\psi\theta} = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \psi} - u_{\theta} \cotg \psi \right] + \frac{1}{2\rho \sin \psi} \frac{\partial u_{\psi}}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{\theta\rho} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho \sin \psi} \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \rho} - \frac{u_{\theta}}{\rho} \right]$$

$$\gamma_{\rho\psi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_{\psi}}{\partial \rho} - \frac{u_{\psi}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \psi} \right].$$

De plus, le premier invariant du tenseur déformation qui mesure la variation de volume a une valeur indépendante du système d'axes. Son expression est :

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z = \varepsilon_{\psi} + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_{\rho}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{divergence du vecteur déplacement.}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho^2 \sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_{\rho} \sin \psi) + \frac{\partial}{\partial \psi} (\rho u_{\psi} \sin \psi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_{\theta}) \right].$$

RELATIONS DE COMPATIBILITE

Les six composantes du tenseur déformation dérivant des trois composantes du vecteur déplacement, elles doivent satisfaire aux relations suivantes obtenues par une seconde dérivation :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]$$

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} .$$

Signalons que ces relations ne sont valables que si les déformations sont petites. Pour les problèmes à deux dimensions, elles s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{2 \partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} .$$

EQUATIONS DE L'EQUILIBRE INDEFINI

Les expressions suivantes respectent les conventions de signes indiquées plus haut.

2

— Coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = X$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = Y$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = Z$$

X, Y, Z : composantes de la force de volume.

Cas particulier : champ de pesanteur et Oz vertical :

$$X = Y = 0 \quad Z = \rho g \quad (\text{Oz orienté vers le bas}).$$

$$Z = -\rho g \quad (\text{Oz orienté vers le haut}).$$

g : accélération de la pesanteur

ρ : masse volumique du milieu continu.

— Coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = R$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2 \tau_{r\theta}}{r} = T$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = Z$$

R, T, Z : composantes de la force de volume.

— Coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho \sin \psi} \frac{\partial \tau_{\theta\rho}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} (2 \sigma_\rho - \sigma_\psi - \sigma_\theta + \tau_{\rho\psi} \cotg \psi) = P$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\psi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho \sin \psi} \frac{\partial \tau_{\psi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_\psi - \sigma_\theta) \cotg \psi + 3 \tau_{\rho\psi}] = Q$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho \sin \psi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} [3 \tau_{\theta\rho} + 2 \tau_{\theta\psi} \cotg \psi] = T$$

P, Q, T : composantes de la force de volume.

FORMULAIRE D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

SOMMAIRE

- Définition des coefficients.
- Relations entre les divers coefficients.
- Valeurs numériques des divers coefficients.
- Fonctions usuelles des coefficients de l'élasticité.
- Fonctions usuelles du coefficient de Poisson.
- Expressions de la loi de Hooke.
- Expression des équations de Navier-Lamé.

DEFINITION DES COEFFICIENTS DE L'ELASTICITE LINEAIRE

a) *Coefficients mesurés expérimentalement*

$$E = - \frac{\Delta\sigma}{\Delta h/h} \quad \text{Module d'Young (Fig. 1)}$$

$$\nu = - \Delta r/\Delta h \quad \text{Coefficient de Poisson (Fig. 1)}$$

$$E_{\text{oed}} = - \frac{\Delta\sigma}{\Delta h/h} \quad \text{Module oedométrique (Fig. 2)}$$

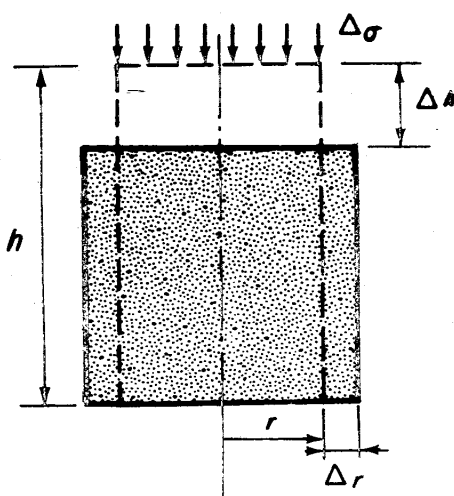


FIG. 1. — Essai de compression simple permettant de mesurer le module d'Young et le coefficient de Poisson. Le tiret indique la forme initiale de l'échantillon et le trait plein sa position finale.

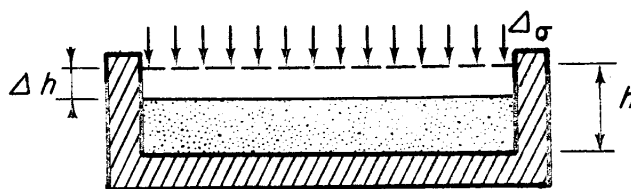


FIG. 2. — Essai de compression oedométrique. Le tiret indique la position initiale de la surface de l'échantillon et le trait plein sa position finale.

b) *Autres coefficients utilisés* (Voir les tableaux ci-après)

- K : Module de compressibilité volumétrique,
 E_i : Module de compressibilité linéaire,
 E_d : Module déviatoire,
 m : Inverse du coefficient de Poisson,
 λ et μ : Coefficient de Lamé,
 G : Module de distorsion,
 A et B : Coefficients de Cauchy.

Nota :

- 1) Le système (λ, μ) est commode pour les calculs à cause de son homogénéité.
- 2) Les expressions en (G, ν) sont généralement les plus simples.
- 3) Un corps élastique est incompressible si :
 $\nu = 0,5$ ou $A = B = \lambda = E_i = \infty$ ou $m = 2$.

RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS DE L'ELASTICITE LINEAIRE

en fonction de							
Coefficient	A et B	E_i et E_d	E et ν	E et m	G et ν	λ et μ	
$E_{oed} = A$	A	$\frac{E_i + 2 E_d}{3}$	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E_m(m-1)}{(m+1)(m-2)}$	$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$	$\lambda + 2\mu$	
$E_i = 3K$	$A + 2B$	E_i	$\frac{E}{1-2\nu}$	$\frac{E_m}{m-2}$	$\frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu}$	$3\lambda + 2\mu$	
E_d	$A - B$	E_d	$\frac{E}{1+\nu}$	$\frac{E_m}{m+1}$	$2G$	2μ	
E	$\frac{(A-B)(A+2B)}{A+B}$	$\frac{3 E_i E_d}{2 E_i + E_d}$	E	E	$2G(1+\nu)$	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	
ν	$\frac{B}{A+B}$	$\frac{E_i - E_d}{2 E_i + E_d}$	ν	$\frac{1}{m}$	ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	
m	$\frac{A+B}{B}$	$\frac{2 E_i + E_d}{E_i - E_d}$	$\frac{1}{\nu}$	m	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda}$	
$\lambda = B$	B	$\frac{E_i - E_d}{3}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E_m}{(m+1)(m-2)}$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	λ	
$\mu = G$	$\frac{A-B}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_m}{2(m+1)}$	G	μ	

VALEURS NUMERIQUES DES DIVERS COEFFICIENTS

DE L'ELASTICITE LINEAIRE

ν	0	0,1	0,2	0,25	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,45	0,5
$\frac{A}{E}$	1	1,023	1,111	1,2	1,346	1,5	2,14	3,79	∞
$\frac{B}{E}$	0	0,114	0,278	0,4	0,577	0,75	1,43	3,10	∞
$\frac{E_1}{E}$	1	1,25	$1,666 = \frac{5}{3}$	2	2,5	3	5	10	∞
$\frac{E_d}{E}$	1	0,91	$0,833 = \frac{5}{6}$	0,8	0,77	0,75	$0,714 = \frac{5}{7}$	0,690	$0,666 = \frac{2}{3}$
$\frac{\lambda}{E}$	0	0,114	0,278	0,4	0,577	0,75	$1,43 = \frac{10}{7}$	3,10	∞
$\frac{\mu}{E} = \frac{G}{E}$	0,5	0,455	0,417	0,4	0,385	$0,375 = \frac{3}{8}$	0,357	0,345	$0,333 = \frac{1}{3}$
$\frac{K}{E}$	$0,333 = \frac{1}{3}$	0,417	0,556	$0,666 = \frac{2}{3}$	$0,833 = \frac{5}{6}$	1	$1,666 = \frac{5}{3}$	3,333	∞

1-3

FONCTIONS USUELLES DES COEFFICIENTS DE L'ELASTICITE

λ et μ	E et ν	E et m	G et ν
$\lambda + \mu$	$= \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$	$= \frac{E m^2}{2(m+1)(m-2)}$	$= \frac{G}{1-2\nu}$
$\lambda + 2\mu$	$= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$= \frac{E m(m-1)}{(m+1)(m-2)}$	$= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$
$2\lambda + \mu$	$= \frac{E(1+2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$	$= \frac{E m(m+2)}{2(m+1)(m-2)}$	$= \frac{G(1+2\nu)}{1-2\nu}$
$\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$	$= \frac{E}{4(1-\nu^2)}$	$= \frac{E m^2}{4(m^2-1)}$	$= \frac{G}{2(1-\nu)}$
$\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}$	$= \frac{E}{1-\nu}$	$= \frac{E m}{m-1}$	$= \frac{2G(1+\nu)}{1-\nu}$
$\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda}$	$= \frac{E}{\nu(1+\nu)}$	$= \frac{E m^2}{m+1}$	$= \frac{2G}{\nu}$
$\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda}$	$= \frac{E}{\nu}$	$= \frac{E m}{\nu}$	$= \frac{2G(1+\nu)}{\nu}$

CONVERSION DES FONCTIONS USUELLES
DU COEFFICIENT DE POISSON

1-3

λ et μ	ν	m
$\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$	$= 2(1 + \nu)$	$= \frac{2(m + 1)}{m}$
$\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$	$= 2(1 - \nu)$	$= \frac{2(m - 1)}{m}$
$\frac{2\lambda + \mu}{\lambda + \mu}$	$= 1 + 2\nu$	$= \frac{m + 2}{m}$
$\frac{\mu}{\lambda + \mu}$	$= 1 - 2\nu$	$= \frac{m - 2}{m}$
$\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}$	$= \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$	$= \frac{m + 1}{m - 1}$
$\frac{2\lambda + \mu}{\mu}$	$= \frac{1 + 2\nu}{1 - 2\nu}$	$= \frac{m + 2}{m - 2}$
$\frac{\lambda}{\mu}$	$= \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$	$= \frac{2}{m - 2}$
$\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$	$= \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$	$= \frac{m - 2}{2(m - 1)}$
$\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}$	$= \frac{\nu}{1 + \nu}$	$= \frac{1}{m + 1}$
$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$	$= \frac{\nu}{1 - \nu}$	$= \frac{1}{m - 1}$
$\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$	$= 3 - 4\nu$	$= \frac{3m - 4}{m}$

VALEURS NUMERIQUES DES FONCTIONS USUELLES

DU COEFFICIENT DE POISSON, ν

ν	0	0,1	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,45	0,5
$1/\nu$	∞	10	5	4	3,33	3	2,5	2,22	2
$1 + \nu$	1	1,1	1,2	1,25	1,3	1,33	1,4	1,45	1,5
$1 - \nu$	1	0,9	0,8	0,75	0,7	0,67	0,6	0,55	0,5
$1 - 2\nu$	1	0,8	0,6	0,5	0,4	0,33	0,2	0,1	0
$1 - \nu^2$	1	0,99	0,96	0,94	0,91	0,89	0,84	0,80	0,75
$(1 + \nu)(1 - 2\nu)$	1	0,88	0,72	0,62	0,52	0,44	0,28	0,14	0
$\frac{\nu}{1 - \nu}$	0	0,11	0,25	0,33	0,43	0,50	0,67	0,82	1
$\frac{1 + \nu}{1 - \nu}$	1	1,22	1,50	1,67	1,86	2	2,33	2,64	3
$\frac{1 - 2\nu}{\nu}$	∞	8	3	2	1,33	1	0,5	0,22	0
$\frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}$	1	0,73	0,5	0,4	0,31	0,25	0,14	0,07	0
$\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}$	1	0,89	0,75	0,67	0,57	0,5	0,33	0,18	0
$\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu}$	1	0,98	0,90	0,83	0,74	0,67	0,47	0,26	0

LOI DE HOOKE

a) Cas général : trois dimensions

1) Ecriture (E_i, E_d)

$$\bar{\sigma} = -E_i \bar{D}_i - E_d \bar{D}_d$$

$$\sigma_{ij} = -E_i \delta_{ij} \theta - E_d (\epsilon_{ij} - \theta \delta_{ij})$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = -E_i \begin{vmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{vmatrix} - E_d \begin{vmatrix} \epsilon_x - \theta & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y - \theta & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & \epsilon_z - \theta \end{vmatrix}$$

soit, en développant :

$$\begin{cases} \sigma_x = -E_i \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3} \right) - E_d \left(\frac{2\epsilon_x - \epsilon_y - \epsilon_z}{3} \right) \\ \tau_{xy} = -E_d \gamma_{xy} \end{cases}$$

(à compléter par permutation circulaire)

d'où, en inversant :

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\sigma_m \delta_{ij}}{E_i} - \frac{\sigma_{ij} - 3\sigma_m \delta_{ij}}{E_d}$$

soit, en développant :

$$\begin{cases} \epsilon_x = -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3 E_i} - \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3 E_d} \\ \gamma_{xy} = -\tau_{xy} / E_d \end{cases}$$

(à compléter par permutation circulaire)

2) Ecriture (E, ν)

$$\sigma_{ij} = -\frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right]$$

soit, en développant :

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \tau_{xy} = -\frac{E}{1+\nu} \gamma_{xy} \end{cases}$$

(à compléter par permutation circulaire)

d'où, en inversant :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{(1+\nu) \sigma_{ij} - 3\nu \sigma_m \delta_{ij}}{E}$$

soit, en développant :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -\frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \gamma_{xy} = -\frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \end{cases}$$

3) Ecriture de Lamé (λ, μ)

$$\sigma = -3 \lambda D_i - 2 \mu D$$

$$\sigma_{ij} = -3 \lambda \theta \delta_{ij} - 2 \mu \epsilon_{ij}$$

soit, en développant :

$$\begin{cases} \sigma_x = -\lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) - 2 \mu \epsilon_x \\ \tau_{xy} = -2 \mu \gamma_{xy} \end{cases}$$

(à compléter par permutation circulaire)

d'où, en inversant :

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2 \mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{3 \lambda}{3 \lambda + 2 \mu} \sigma_m \delta_{ij} \right]$$

soit, en développant :

$$\begin{cases} \epsilon_x = -\frac{1}{2 \mu} \sigma_x - \frac{\lambda}{3 \lambda + 2 \mu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \gamma_{xy} = -\frac{\tau_{xy}}{2 \mu} \end{cases}$$

(à compléter par permutation circulaire)

b) Problèmes à deux dimensions

1) Déformation plane

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_x \right] \\ \sigma_x = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z \right] \\ \tau_{zx} = -\frac{E}{1+\nu} \gamma_{zx} \\ \sigma_y = \nu(\sigma_z + \sigma_x) \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

et inversement

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_z = -\frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu)\sigma_z - \nu\sigma_x \right] \\ \varepsilon_x = -\frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_z \right] \\ \gamma_{zx} = -\frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} \\ \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

2) Contrainte plane :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = -\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_z + \nu\epsilon_x) \\ \sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_z) \\ \tau_{zx} = -\frac{E}{1+\nu} \gamma_{zx} \\ \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

et inversement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_z = -(\sigma_z - \nu\sigma_x)/E \\ \epsilon_x = -(\sigma_x - \nu\sigma_z)/E \\ \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} (\sigma_z + \sigma_x) \\ \gamma_{zx} = -\frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

EQUATIONS DE NAVIER-LAME

Equations du mouvement indéfini + Loi de Hooke → Equations de Navier-Lamé

a) *Cas général : trois dimensions*

Ecriture indicielle :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + X_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

ou :

$$(\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + X_i = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} .$$

Ecriture vectorielle

$$(\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div } \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + \vec{X} = \rho \vec{\Gamma} ,$$

ou

$$(\lambda + \mu) \text{rot} (\text{rot } \vec{u}) + (\lambda + 2\mu) \Delta \vec{u} + \vec{X} = \rho \vec{\Gamma} ,$$

ou

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad} (\text{div } \vec{u}) - \text{rot} (\text{rot } \vec{u}) + \vec{X} = \rho \vec{\Gamma} .$$

Ecriture développée de Lamé

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + X = \rho \frac{d^2 x}{dt^2} ,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + Y = \rho \frac{d^2 y}{dt^2} ,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + Z = \rho \frac{d^2 z}{dt^2} .$$

Ecriture développée (E, ν) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + (1 - 2\nu) \Delta u = \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \left(\rho \frac{d^2 x}{dt^2} - X \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + (1 - 2\nu) \Delta v = \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \left(\rho \frac{d^2 y}{dt^2} - Y \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + (1 - 2\nu) \Delta w = \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \left(\rho \frac{d^2 z}{dt^2} - Z \right) .$$

b) Problèmes à deux dimensions

1) Déformation plane.

Même écriture qu'à trois dimensions.

2) Contrainte plane.

Ecriture développée de Lamé :

$$\left\{ \begin{array}{l} (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + (\lambda + 2\mu) \Delta w = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left(\rho \frac{d^2 z}{dt^2} - Z \right) \\ (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \Delta u = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left(\rho \frac{d^2 x}{dt^2} - X \right) \end{array} \right.$$

Ecriture développée (E, ν) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \Delta w = \frac{2(1 - \nu)}{E} \left(\rho \frac{d^2 z}{dt^2} - Z \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \Delta u = \frac{2(1 - \nu)}{E} \left(\rho \frac{d^2 x}{dt^2} - X \right) . \end{array} \right.$$

FORMULAIRE DE PLASTICITÉ

SOMMAIRE

- Diverses expressions de la loi de Coulomb.
- Fonctions usuelles de l'angle de frottement interne.
- Relations entre un angle quelconque et l'angle de frottement interne.
- Relations sur le cercle de Mohr.

DIVERSES EXPRESSIONS DE LA LOI DE COULOMB

En coordonnées cartésiennes, la loi de Coulomb s'écrit :

$$\sqrt{\frac{(\sigma_z - \sigma_x)^2}{4} + \tau_{zx}^2} - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \sin \phi = c \cos \phi$$

ou bien :

$$\sqrt{\frac{(\sigma_z - \sigma_x)^2}{4} + \tau_{zx}^2} = \frac{\sin \phi}{2} (\sigma_z + \sigma_x + 2H)$$

en posant $H = c \cotg \phi$.

D'autres expressions sont données sur la figure 1.

FONCTIONS USUELLES DE L'ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE

$$\cos \phi = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\phi}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\phi}{2} \right)$$

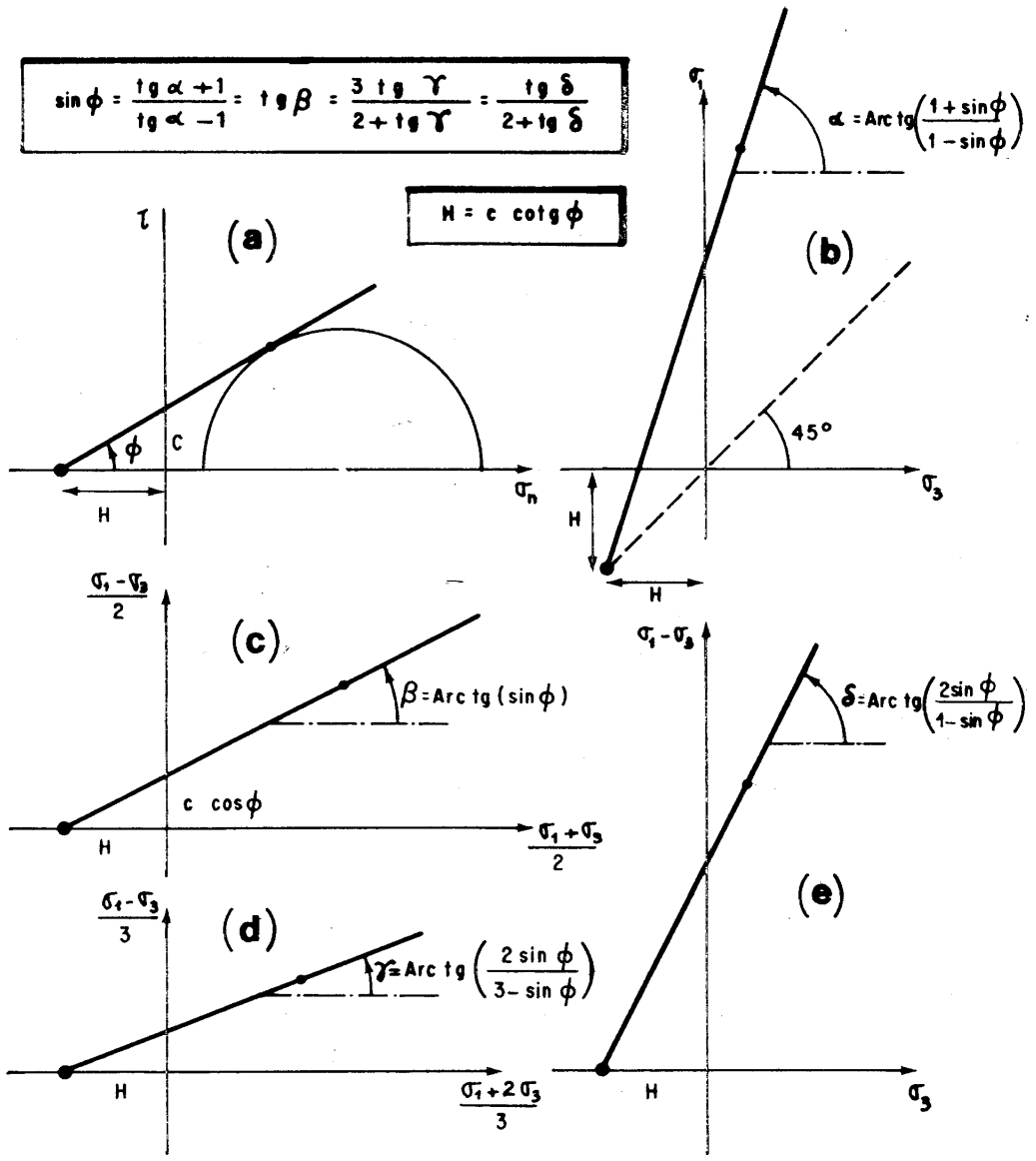
$$\begin{aligned} \sin \phi &= 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) - 1 = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \\ &= 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$1 + \sin \phi = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = \frac{\cos \phi}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)}$$

$$1 - \sin \phi = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \frac{\cos \phi}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)}$$

$$\frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)}$$

$$\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)}$$



- (a) Representation de MOHR $\tau = c + \sigma_n \operatorname{tg} \phi$
- (b) $\sigma_1 = 2c \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} + \sigma_3 \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$ ou bien $(\sigma_1 + H)(1 - \sin \phi) = (\sigma_3 + H)(1 + \sin \phi)$
- (c) $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \phi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi$
- (d) $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} = 2c \frac{\cos \phi}{3 - \sin \phi} + \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} \frac{2 \sin \phi}{3 - \sin \phi}$
- (e) $\sigma_1 - \sigma_3 = c \frac{2 \cos \phi}{1 - \sin \phi} + \sigma_3 \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}$

FIG. 1. — Diverses expressions de la loi de Coulomb.

1-4

RELATIONS ENTRE UN ANGLE QUELCONQUE ET L'ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE

Soit δ un angle quelconque sur le cercle de Mohr (Fig. 2). On a les relations suivantes :

$$\sin \Gamma = \frac{\sin \delta}{\sin \phi}$$

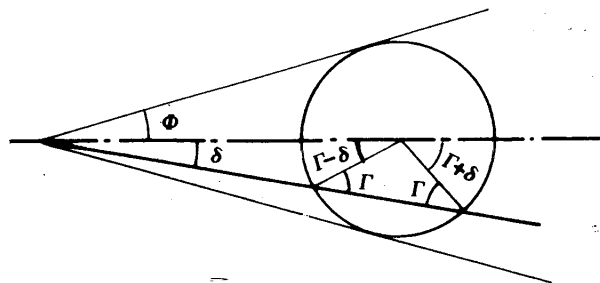


FIG. 2. — Définition des angles δ et Γ sur le cercle de MOHR.

$$\sin (\Gamma + \delta) = \sin \Gamma (\cos \delta + \sin \phi \cos \Gamma)$$

$$\sin (\Gamma - \delta) = \sin \Gamma (\cos \delta - \sin \phi \cos \Gamma)$$

$$1 + \sin \phi \cos (\Gamma + \delta) = \cos \delta (\cos \delta + \sin \phi \cos \Gamma)$$

$$1 - \sin \phi \cos (\Gamma - \delta) = \cos \delta (\cos \delta - \sin \phi \cos \Gamma)$$

$$\frac{\sin (\Gamma + \delta)}{\sin (\Gamma - \delta)} = \frac{\cos \delta + \sin \phi \cos \Gamma}{\cos \delta - \sin \phi \cos \Gamma} = \frac{1 + \sin \phi \cos (\Gamma + \delta)}{1 - \sin \phi \cos (\Gamma - \delta)}$$

• Valeurs pour $\delta = 0$ ($\Gamma = 0$) :

$$\frac{\sin (\Gamma + \delta)}{\sin \Gamma} = 1 + \sin \phi$$

$$\frac{\sin (\Gamma + \delta)}{\sin \delta} = \frac{1 + \sin \phi}{\sin \phi}$$

$$\frac{\sin (\Gamma - \delta)}{\sin \Gamma} = 1 - \sin \phi$$

$$\frac{\sin (\Gamma - \delta)}{\sin \delta} = \frac{1 - \sin \phi}{\sin \phi}$$

$$\frac{\sin (\Gamma + \delta)}{\sin (\Gamma - \delta)} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

• Valeurs pour $\delta = \phi$ ($\Gamma = \pi/2$) :

$$1 + \sin \phi \cos (\Gamma + \delta) = 1 - \sin \phi \cos (\Gamma - \delta) = \cos^2 \phi$$

$$\sin (\Gamma + \delta) = \sin (\Gamma - \delta) = \cos \phi \quad \frac{\sin (\Gamma + \delta)}{\sin (\Gamma - \delta)} = 1$$

RELATIONS SUR LE CERCLE DE MOHR

On a les relations suivantes entre les divers points remarquables d'un cercle de Mohr tangent aux droites de Coulomb (Fig. 3) :

$$R = \frac{p \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{b \sin \phi}{1 + \sin \phi}, \quad d = \frac{p}{1 - \sin \phi} = \frac{b}{1 + \sin \phi},$$

$$q = \frac{p \cos \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{b \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad \frac{b}{p} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right).$$

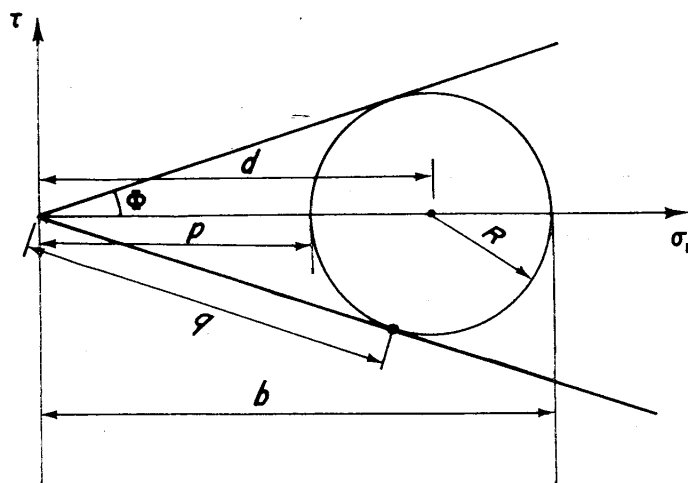


FIG. 3. — Points remarquables d'un cercle de Mohr tangent aux droites de Coulomb.

ORDRES DE GRANDEUR DES CARACTÉRISTIQUES DU SOL

SOMMAIRE

- Poids volumique.
- Module d'Young et coefficient de Poisson.
- Cohésion et Angle de frottement interne.

Les valeurs typiques indiquées ici ne sont que des ordres de grandeur fréquemment rencontrés : il ne s'agit aucunement de valeurs moyennes et ceci ne saurait, en aucune circonstance, dispenser de mesures au laboratoire ou *in situ*.

POIDS VOLUMIQUE

On utilise le poids volumique, désigné d'une manière générale par γ , dans les calculs suivants :

- tassement : uniquement dans le calcul indirect où le poids volumique sert à déterminer la contrainte qui régnait dans le sol avant l'application de la charge ;
- force portante : à la fois dans le calcul direct (où γ intervient explicitement dans les formules) et dans le calcul approché par cercles de glissement.

Il faut distinguer le sol situé en dessus de la nappe phréatique et celui situé en dessous :

- au-dessus de la nappe : si le sol est perméable (sable, gravier) il est sec et il faut employer le *poids volumique sec*, γ_d , et si le sol est peu perméable (argile) il est humide, à cause notamment de la capillarité, et il faut utiliser le *poids volumique total*, γ , souvent voisin du *poids volumique saturé*, γ_{sat} ;
- au-dessous de la nappe : si l'on fait un calcul avant drainage (force portante avant drainage ou tassement instantané (1)) il faut considérer le *poids volumique saturé*, γ_{sat} , et si l'on fait un calcul après drainage (force portante après drainage ou tassement final) il faut considérer le *poids volumique immergé*, γ' .

Les relations entre ces divers poids volumiques sont :

$$\gamma = \gamma_d(1 + w) \quad (w : \text{teneur en eau})$$

$$\gamma_{sat} = \gamma' + 1 \text{ g/cm}^3 \quad (1 \text{ g/cm}^3 = 62,5 \text{ lb/cu.ft})$$

(1) De toute façon le poids volumique est rarement utile pour le tassement instantané car on fait généralement un calcul direct.

et avec une densité des grains de sol égale à 2,7, ce qui est vrai dans l'immense majorité des sols non organiques :

$$\gamma' = 0,63 \gamma_d .$$

Enfin, les ordres de grandeur classiques de γ_d sont :

— Sables ou graviers uniformes :

peu compacts : 1,4-1,5 g/cm³ (85-95 lb/cu.ft),
 compacts : 1,6-1,8 g/cm³ (100-110 lb/cu.ft).

— Graviers sableux (granulométrie étendue) :

peu compacts : 1,6-1,7 g/cm³ (100-105 lb/cu.ft),
 compacts : 1,8-1,9 g/cm³ (110-120 lb/cu.ft),
 très compacts : 2,0-2,2 g/cm³ (125-135 lb/cu.ft).
 (compactés)

— Argiles :

très peu compactes, vases : 0,8-1,2 g/cm³ (50-75 lb/cu.ft),
 peu compactes : 1,3-1,4 g/cm³ (80-90 lb/cu.ft),
 compactes : 1,5-1,6 g/cm³ (95-100 lb/cu.ft),
 très compactes : 1,7-1,8 g/cm³ (105-110 lb/cu.ft).
 (compactées)

MODULE D'YOUNG ET COEFFICIENT DE POISSON

Le module d'Young et le coefficient de Poisson sont utilisés pour les calculs de tassement. Les modules dépendent de la contrainte appliquée, les valeurs données concernent des contraintes appliquées inférieures à 10 bars.

Le module d'Young et le coefficient de Poisson sont définis dans le "formulaire d'élasticité linéaire" (Sect. 1-3). Leur mesure se fait dans une expérience de compression simple ou de compression triaxiale. On se dispense souvent de la mesure du coefficient de Poisson en se contentant des valeurs approchées données ci-après.

Pour les argiles saturées, il convient de distinguer le tassement instantané qui se calcule à l'aide de E et ν mesurés dans un *essai non drainé* (E_u, ν_u) et le tassement final qui se calcule à l'aide de E et ν mesurés dans un *essai drainé* (E', ν'). L'influence du drainage sur le tassement est précisée dans l'introduction (§ 2 et § 5).

Enfin, on peut aussi mesurer le *module oedométrique*, E_{oed} , défini dans le "formulaire d'élasticité linéaire" (Sect. 1-3). Dans le cas de sable, gravier ou argile sèche (cas 1 et 4 ci-après), on déduit le module d'Young à l'aide de la formule suivante :

$$E = \frac{E_{oed}(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu}$$

Dans le cas des argiles saturées (cas 2 et 3 ci-après) on ne peut en déduire que le module d'Young relatif tassement total (c'est-à-dire celui que l'on obtiendrait dans un essai drainé de compression simple ou triaxiale) à l'aide de la formule suivante :

$$E' = \frac{E_{oed}(1 + \nu')(1 - 2\nu')}{1 - \nu'}$$

Pour ν' égal à 0,3 ou 1/3 on a :

$$E' \approx 0,7 E_{oed} .$$

Notons que, dans le langage habituel de la Mécanique des Sols, tassement instantané veut dire tassement rapide par rapport au drainage et non pas tassement dû à une sollicitation extrêmement rapide mettant en jeu des forces dynamiques (choc, vent). Par conséquent, E_u n'est pas le module dynamique dont on aurait besoin pour calculer la réaction du sol sous l'effet du vent.

Rappelons enfin que les propriétés du sol et, en particulier le module d'Young, dépendent de l'histoire antérieure du sol et, notamment, de la plus grande contrainte qu'il a subie avant la construction de la fondation. Si l'on parvient à connaître cette contrainte et qu'à une profondeur donnée elle est supérieure, égale ou inférieure au poids des terres sus-jacentes, le sol est dit, respectivement, sur-consolidé, normalement consolidé ou sous-consolidé.

1. *Sables et graviers*

Le tassement se produit instantanément $v \approx 0,3$.

- Peu compacts, grains anguleux et contraintes appliquées faibles :
 $E \approx$ quelques centaines de bars (ton/sq.ft) ;
- Compacts, grains arrondis et contraintes appliquées fortes :
 $E \approx 1\ 000-3\ 000$ bars (ton/sq.ft) et jusqu'à 5 000 bars (ton/sq.ft) pour des galets très compacts.

2. *Argile molle saturée normalement consolidée*

Une faible partie (environ 10-30 %) du tassement se produit instantanément. Le reste se produit après consolidation.

- Tassement instantané (essai "non drainé") :

$$v = v_u = 0,5 \text{ (exactement),}$$

$$E = E_u \approx \text{quelques dizaines de bars (ton/sq.ft).}$$

- Tassement total (essai "drainé") :

$$v = v' = 0,2 \text{ à } 0,4,$$

$$E = E' : \text{inférieur à } 10 \text{ ou } 15 \text{ bars (ton/sq.ft) (environ de } 3 \text{ à } 7 \text{ fois plus petit que } E \text{ mesuré dans l'essai "non drainé").}$$

3. *Argile résistante saturée fortement surconsolidée*

Une grande partie du tassement se produit instantanément. Le reste se produit après consolidation :

- tassement instantané (essai "non drainé")

$$v = v_u = 0,5 \text{ (exactement)}$$

$$E = E_u \approx \text{plusieurs dizaines de bars (ton/sq.ft) (jusqu'à quelques centaines pour certaines marnes).}$$

- tassement total (essai "drainé") :

$$v = v' = 0,3,$$

$$E = E' \approx \text{plusieurs dizaines de bars (ton/sq.ft) (seulement légèrement plus faible que } E_u \text{ mesuré dans l'essai "non drainé").}$$

1-5

4. Argile sèche (degré de saturation inférieur à environ 0,7) :

Le tassement se produit instantanément. Essais "drainé" ou "non drainé" donnent des résultats voisins :

$$\nu \approx 0,3,$$

$$E \approx \text{de quelques dizaines à quelques centaines de bars (ton/sq.ft).}$$

COHESION ET ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE DU SOL

La cohésion et l'angle de frottement interne du sol sont utilisés dans les calculs de force portante. Ce sont, respectivement, l'ordonnée à l'origine et la pente de la droite de Coulomb qui est l'enveloppe des cercles de Mohr de rupture. Ceci est illustré par la figure 1a du "formulaire de plasticité" (Sect. 1-4). Leur mesure se fait donc en poussant plusieurs essais triaxiaux jusqu'à la rupture et en traçant l'enveloppe des cercles de Mohr correspondants. On peut également faire ces mesures à l'aide d'un essai de cisaillement direct.

Pour les argiles saturées, il convient de distinguer la force portante instantanée qui se calcule à l'aide de c et ϕ mesurés dans un *essai non drainé* (c_u et ϕ_u) et la force portante après drainage qui se calcule à l'aide de c' et ϕ' . L'influence du drainage sur la force portante est précisée dans l'Introduction (§ 2 et § 4).

1. *Enrochements, graviers, sables et silts non plastiques*

Le drainage s'effectue très rapidement et seule la pression limite après drainage, p'_{lim} , est à calculer.

- Cohésion :

Elle est nulle, $c' = 0$. Certains graviers sableux possèdent, en place, une cohésion, mais elle risque de diminuer, voire de s'annuler, en présence d'eau. On prendra donc toujours $c' = 0$.

- Angle de frottement interne

Les valeurs les plus fortes correspondent à une grande compacité et une grande angularité des grains :

- *silt non plastique, sable à granulométrie uniforme :*

$$\phi' \approx 25-30^\circ ;$$

CHARGES CONCENTRÉES

Quand peut-on représenter une charge réelle par une force concentrée ? (*Voir page suivante.*)

Charge concentrée ponctuelle

- sur un sol homogène d'épaisseur infinie Section 2-1
- sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie (charge normale seulement) Section 2-2
- sur un sol composé de deux couches (charge normale seulement) Section 2-3

Charge concentrée sur une ligne de longueur finie (charge normale seulement)

- sur un sol homogène d'épaisseur infinie Section 2-4

2-1

2-2

2-3

2-4

QUAND PEUT-ON REPRESENTER UNE CHARGE REELLE PAR UNE FORCE CONCENTREE

En réalité, il n'existe pas de forces strictement concentrées, c'est-à-dire dont la surface d'application soit nulle. Cependant, les résultats obtenus en faisant cette hypothèse sont susceptibles d'un grand nombre d'applications pratiques car, du fait de leur simplicité, ils sont d'utilisation facile et embrassent un grand nombre de cas. Bien entendu, ces résultats ne peuvent être qu'approchés. Encore faut-il savoir de combien. C'est pourquoi nous avons chiffré cette approximation dans un cas particulier, celui où la charge réelle est normale et uniformément répartie sur une surface carrée. L'écart entre les valeurs réelles et celles calculées avec une force concentrée est donné sur la figure 1 pour les contraintes et sur la figure 2 pour les tassements.

Bien entendu, ces deux graphiques ne répondent que très partiellement à la question posée puisque seul un cas particulier est considéré. Néanmoins, les indications qu'ils fournissent permettent d'avoir une idée de l'erreur commise dans la plupart des cas d'utilisation. Nous pensons que cela suffit et on peut d'ailleurs remarquer que si l'on pouvait, dans tous les cas, donner exactement l'erreur commise c'est que l'on serait capable de tous les traiter rigoureusement et que, par conséquent, l'approximation de la charge concentrée n'aurait aucun intérêt.

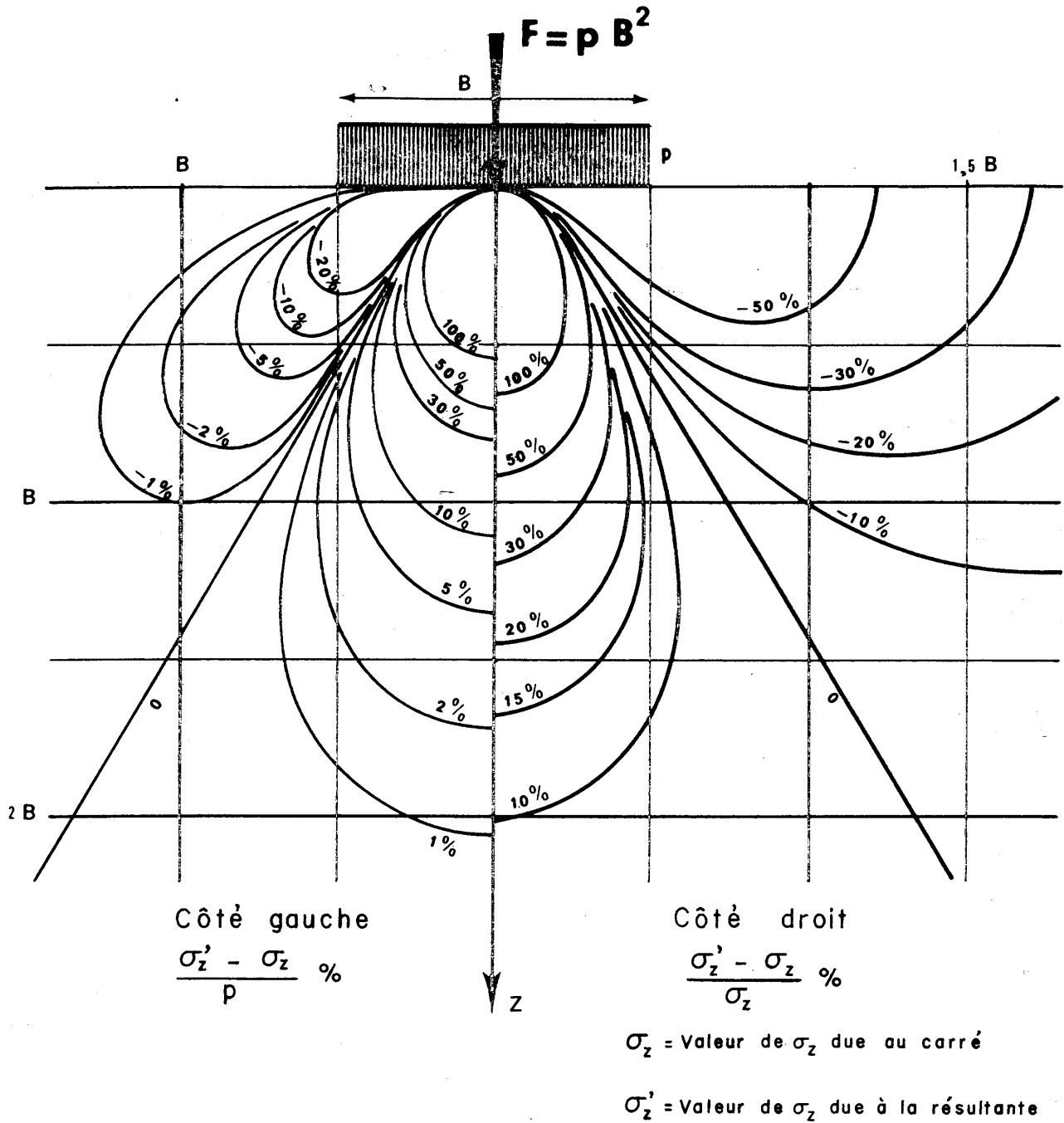
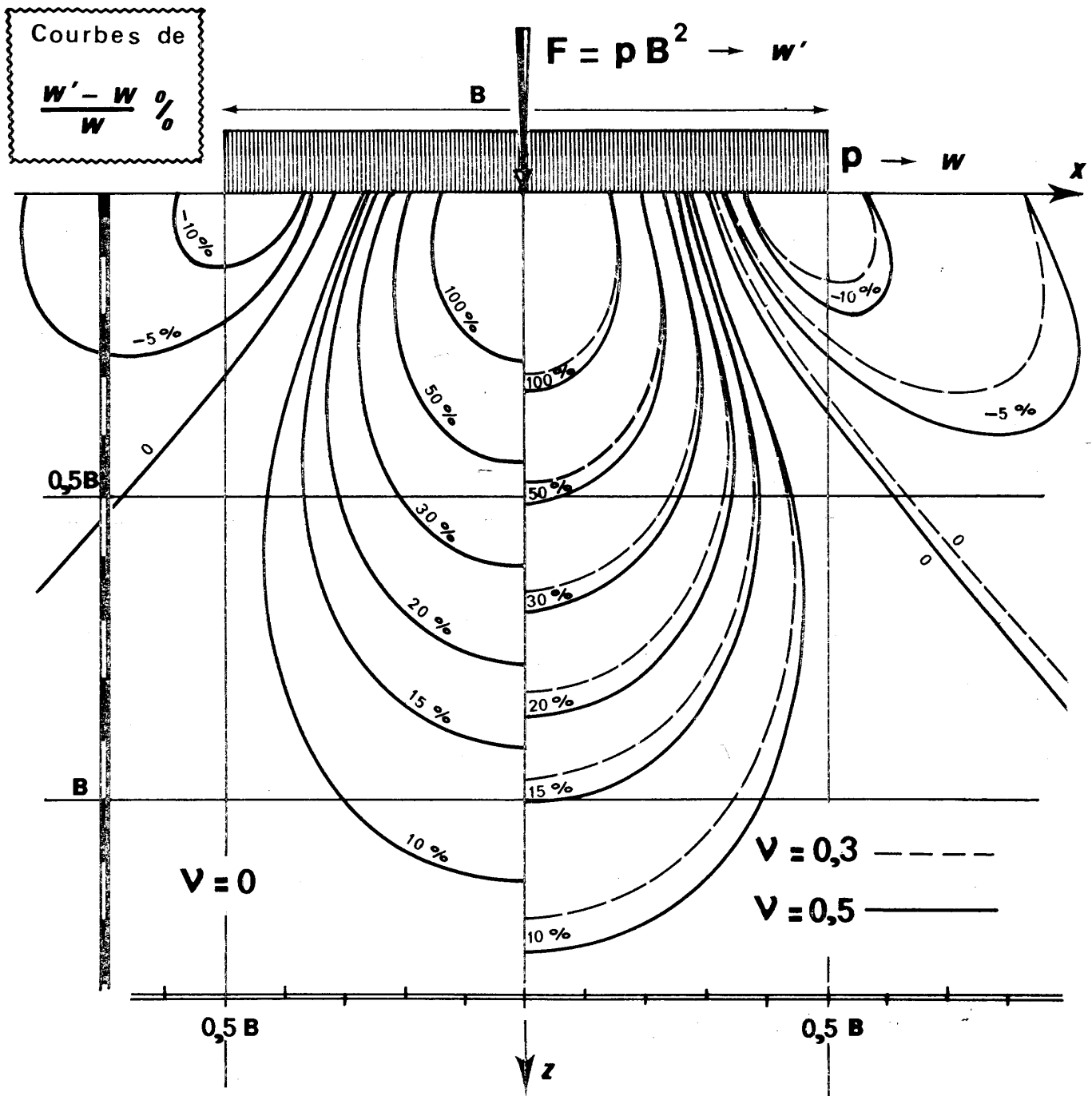


FIG. 1. - Comparaison entre les valeurs de σ_z provoquées par une pression p uniformément répartie sur un carré de côté B et les valeurs σ'_z que l'on obtient en remplaçant cette charge par sa résultante $F = pB^2$ (erreur absolue à gauche et relative à droite).



2-1

FIG. 2. - Comparaison entre les valeurs du tassement w provoqué par une pression p uniformément répartie sur un carré de côté B et les valeurs w' obtenues en remplaçant cette charge par sa résultante $F = pB^2$. Le résultat dépend légèrement du coefficient de Poisson du sol, ν (courbes tracées d'après les valeurs numériques fournies par calculatrice électronique à partir de formules explicites).

FORCE CONCENTRÉE PONCTUELLE

(semelle sous poteau)
sur un sol homogène d'épaisseur infinie

2-1

SOMMAIRE

- Définition du sol
- Définition de la charge
- Calcul des contraintes
- Calcul des déplacements
- Calcul des déformations
- Tables et graphiques
- Expression des coefficients
- Bibliographie

DEFINITION DU SOL

Le sol est supposé homogène sur une épaisseur infinie ("*milieu semi-infini*"). S'il n'est pas homogène, les valeurs données ici pour certaines contraintes (notamment pour σ_z due à une force normale à la surface du sol) peuvent cependant être considérées comme une bonne approximation des contraintes réelles (sauf, peut-être, dans le cas d'une *couche de sol très dur reposant sur des terrains bien plus mous*). Au contraire, pour que les valeurs du tassement (et plus généralement des déplacements) et des déformations données ici soient correctes, il faut que les hypothèses (homogénéité et épaisseur infinie) soient respectées, au moins avec une bonne approximation.

DEFINITION DE LA CHARGE

Le système d'axes Oxyz est un trièdre trirectangle de sens direct. La surface du sol est le plan Oxy et la verticale descendante est l'axe Oz (Fig. 1).

La force F est une compression appliquée au point O de la surface du sol. Elle est contenue dans le plan Ozx et inclinée d'un angle δ par rapport à Oz. Cet angle est positif dans le sens trigonométrique. Les composantes normale et tangentielle de F sont désignées par N et T, telles que :

$$(1) \quad \begin{cases} N = F \cos \delta \\ T = F \sin \delta \end{cases}$$

N est toujours positive alors que T a le même signe que δ .

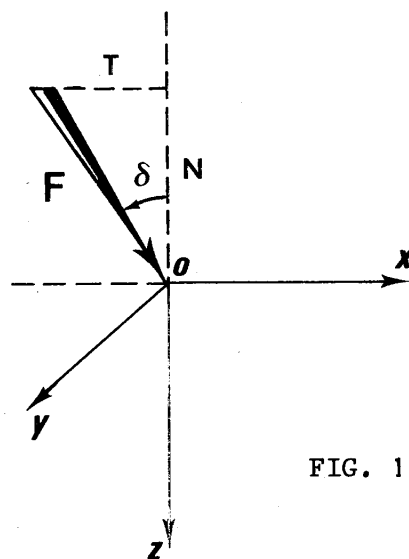


FIG. 1. - Définition de la charge.

CALCUL DES CONTRAINTESa) Cas général

Les contraintes en tout point du sol sont données par les formules suivantes :

$$(2) \quad \sigma_x = \frac{N}{z^2} \left[G_2 - (1 - 2\nu) G_2' \right] + \frac{x}{|x|} \frac{T}{z^2} \left[G_3 - (1 - 2\nu) G_3' \right]$$

$$(3) \quad \sigma_y = \frac{N}{z^2} \left[H_2 - (1 - 2\nu) H_2' \right] + \frac{x}{|x|} \frac{T}{z^2} \left[G_5 - (1 - 2\nu) G_5' \right]$$

$$(4) \quad \sigma_z = \frac{N}{z^2} G_0 + \frac{x}{|x|} \frac{T}{z^2} G_1$$

$$(5) \quad \tau_{xy} = \frac{xy}{|xy|} \frac{N}{z^2} \left[G_4 - (1 - 2\nu) G_4' \right] + \frac{y}{|y|} \left[H_5 + (1 - 2\nu) H_3' \right]$$

$$(6) \quad \tau_{yz} = \frac{y}{|y|} \frac{N}{z^2} H_1 + \frac{xy}{|xy|} \frac{T}{z^2} G_4$$

$$(7) \quad \tau_{zx} = \frac{x}{|x|} \frac{N}{z^2} G_1 + \frac{T}{z^2} G_2$$

avec :

N, T : composantes normale et tangentielle de la force appliquée,

x, y, z : coordonnées du point où l'on calcule les contraintes,

ν : coefficient de Poisson du sol,

G, H : coefficients sans dimensions dont les valeurs numériques sont données dans des tables et graphiques.

Exemple 1 :

Considérons une force de 119×10^4 newtons (268 000 lb) inclinée de $\delta = 30^\circ$.
Quelle est la valeur de σ_z pour $x = -1,8$ m (-6 ft) $y = 4,2$ m (14 ft) et
 $z = 6$ m (20 ft) ?

Calculons d'abord les deux composantes de la force :

$$\begin{aligned} N &= F \cos \delta = 119 \times 10^4 \times \cos 30^\circ = 103 \times 10^4 \text{ newtons} \\ &= 268\,000 \times \cos 30^\circ = 232\,000 \text{ lb.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= F \sin \delta = 119 \times 10^4 \times \sin 30^\circ = 59,5 \times 10^4 \text{ newtons} \\ &= 268\,000 \times \sin 30^\circ = 134\,000 \text{ lb.} \end{aligned}$$

Ensuite, avec $|x|/z = 0,3$ et $y/z = 0,7$, on lit dans les tables :

$$G_0 = 0,152 \quad G_1 = 0,046.$$

D'où, en utilisant la formule (4) :

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{103 \times 10^4}{36} 0,152 - \frac{59,5 \times 10^4}{36} 0,046 = 0,036 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 0,036 \text{ bar} \\ &= \frac{232\,000}{400} 0,152 - \frac{134\,000}{400} 0,046 = 73 \text{ lb/sq. ft.} \end{aligned}$$

b) Cas particulier : sol incompressible

Dans ce cas, le coefficient de Poisson, ν , vaut 0,5. On peut alors :

- soit utiliser les formules du cas général avec $(1 - 2\nu) = 0$;
- soit utiliser les coordonnées sphériques :

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma_\rho = \frac{N}{z^2} (G_0 + G_2 + H_2) + \frac{T}{z^2} (G_1 + G_3 + G_5) \\ \sigma_\psi = \sigma_\theta = \tau_{\psi\theta} = \tau_{\theta\rho} = \tau_{\rho\psi} = 0 \end{cases}$$

c) Cas particulier : Force normale ($\delta = 0$)

On peut alors :

- soit employer les formules du cas général avec $T = 0$
- soit utiliser les coordonnées cylindriques : (Fig. 2).

$$(9) \quad \sigma_r = \frac{N}{z^2} [G_2 - (1 - 2\nu) G'_2]$$

$$(10) \quad \sigma_\theta = - (1 - 2\nu) \frac{N}{z^2} H'_2$$

$$(11) \quad \sigma_z = \frac{N}{z^2} G_0$$

$$(12) \quad \tau_{zr} = \frac{N}{z^2} G_1$$

$$(13) \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$$

Les valeurs des coefficients G et H sont alors lues dans les tables pour :

$$\frac{y}{z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{z} = \frac{r}{z} .$$

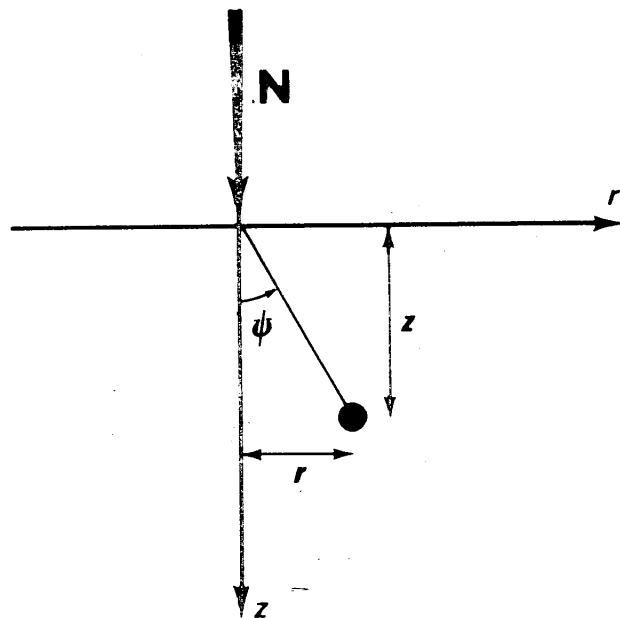


FIG. 2. - Force normale à la surface du sol et définition de la position d'un point.

Exemple 2 :

Considérons une charge normale de 103×10^4 newtons (232 000 lb) exercée sur un sol dont le coefficient de Poisson vaut 0,2. Quelles sont les contraintes σ_z et σ_θ en un point défini par $r = 2,4$ m (8 ft) et $z = 6$ m (20 ft) ?

Pour $\frac{y}{z} = 0$ et $\frac{x}{z} = \frac{r}{z} = 0,4$, on lit dans les tables :

$$G_0 = 0,329 \quad H_2' = 0,056.$$

D'où, en utilisant la formule (10) :

$$\sigma_\theta = - (1 - 0,4) \frac{103 \times 10^4}{36} \times 0,056 = - 960 \text{ N/m}^2 = - 0,0096 \text{ bar}$$

$$= - (1 - 0,4) \frac{232\ 000}{400} \times 0,056 = 19,5 \text{ lb/sq. ft.}$$

Et, en utilisant la formule (11) :

$$\sigma_z = \frac{103 \times 10^4}{36} \times 0,329 = 0,094 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 0,094 \text{ bar}$$

$$= \frac{232\ 000}{400} \times 0,329 = 190 \text{ lb/sq. ft.}$$

d) Contraintes et directions principales dans le cas d'une force normale ($\delta = 0$)

L'une des trois contraintes principales que nous appelons σ_2 n'est autre que σ_θ , perpendiculaire au plan méridien. Les deux autres, σ_1 et σ_3 , sont contenues dans le plan méridien. Leur valeur est donnée par :

$$(14) \quad \sigma_1 = \frac{N}{z} Z_1$$

$$(15) \quad \sigma_2 = \frac{N}{z} Z_2$$

$$(16) \quad \sigma_3 = \frac{N}{z} Z_3$$

Les valeurs numériques des coefficients sans dimensions Z_1 , Z_2 et Z_3 sont données dans une table et un graphique en fonction de ψ défini par :

$$(17) \quad \psi = \text{Arctg} \frac{r}{z} \quad (\text{voir Fig. 2})$$

Enfin, les valeurs de l'angle α définissant l'orientation de la contrainte principale σ_1 sont données dans une table et un graphique.

Exemple 3 :

Considérons une force de 140×10^4 newtons (315 000 lb) exercée normalement à la surface d'un sol dont le coefficient de Poisson est 0,3. Quelle est la plus grande des trois contraintes principales et quelle est son orientation au point de coordonnées $r = 2,1$ m (7 ft) et $z = 3$ m (10 ft) ?

Calculons d'abord ψ d'après (17) :

$$\psi = \text{Arctg} 0,7 = 35^\circ.$$

Pour $\nu = 0,3$, on voit dans les tables que Z_1 est supérieur à Z_2 et Z_3 et a pour valeur :

$$Z_1 = 0,255.$$

D'où, en utilisant la formule (14) :

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{104 \times 10^4}{9} \times 0,255 = 40\,000 \text{ N/m}^2 = 0,4 \text{ bar} \\ &= \frac{315\,000}{100} \times 0,255 = 800 \text{ lb/sq. ft.}\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\nu = 0,3$ et $\psi = 35^\circ$, l'orientation de σ_1 est donnée directement par la table :

$$\alpha = 32,67^\circ.$$

CALCUL DES DEPLACEMENTS

a) Cas général

Les composantes du déplacement en tout point du sol sont données par les formules suivantes qui sont suffisamment simples pour qu'il ne soit pas nécessaire de donner des tables de valeurs numériques :

(18), (19), (20) : coordonnées cartésiennes,

(20), (21), (22) : coordonnées cylindriques,

(22), (23), (24) : coordonnées sphériques.

$$(18) \quad u = \frac{1 + \nu}{2 \pi \rho E} \left\{ xN \left[\frac{z}{\rho^2} - \frac{(1 - 2\nu)}{z + \rho} \right] + T \left[1 + \frac{x^2}{\rho^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{\rho}{z + \rho} - \frac{x^2}{(z + \rho)^2} \right) \right] \right\}$$

$$(19) \quad v = \frac{1 + \nu}{2 \pi E} \frac{y}{\rho} \left\{ N \left[\frac{z}{\rho^2} - \frac{(1 - 2\nu)}{z + \rho} \right] + xT \left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{1 - 2\nu}{(z + \rho)^2} \right] \right\}$$

$$(20) \quad w = \frac{1 + \nu}{2 \pi \rho E} \left\{ N \left[\frac{z^2}{\rho^2} + 2(1 - \nu) \right] + xT \left[\frac{z}{\rho^2} + \frac{1 - 2\nu}{z + \rho} \right] \right\}$$

$$(21) \quad u_r = \frac{1 + \nu}{2 \pi \rho E} \left\{ N \left[\frac{zr}{\rho^2} - (1 - 2\nu) \frac{r}{z + \rho} \right] + T \left[1 + \frac{r^2}{\rho^2} + (1 - 2\nu) \frac{z}{z + \rho} \right] \cos \theta \right\}$$

$$(22) \quad u_{\theta} = -\frac{1+\nu}{2\pi\rho E} T \sin \theta \left[1 + (1-2\nu) \frac{\rho}{z+\rho} \right]$$

$$(23) \quad u_{\rho} = \frac{1+\nu}{2\pi\rho E} \left\{ N \left[4(1-\nu) \cos \psi - (1-2\nu) \right] + 2T \cos \theta \sin \psi \left[1 + (1-2\nu) \frac{\cos \psi}{1+\cos \psi} \right] \right\}$$

$$(24) \quad u_{\psi} = \frac{1+\nu}{2\pi\rho E} \left\{ N \sin \psi \left[4\nu - 3 + \frac{1-2\nu}{1+\cos \psi} \right] + T \cos \theta \left[\cos \psi + (1-2\nu) \frac{\cos 2\psi}{1+\cos \psi} \right] \right\}$$

avec :

N, T : composantes de la force appliquée (voir formule 1),

E : module d'Young du sol,

ν : coefficient de Poisson du sol,

u, v, w : composantes cartésiennes du déplacement,

w, u_r, u_{θ} : composantes cylindriques du déplacement,

$u_{\theta}, u_{\rho}, u_{\psi}$: composantes sphériques du déplacement,

x, y, z : coordonnées cartésiennes du point où l'on calcule le déplacement,

r, θ, z : coordonnées cylindriques du point où l'on calcule le déplacement,

ρ, θ, ψ : coordonnées sphériques du point où l'on calcule le déplacement.

(Nota : on trouvera toutes relations entre les différents systèmes de coordonnées au début du volume, dans la section "Formulaire de Mécanique des Milieux Continus". Section 1-2 du Chapitre 1.)

En particulier :

$$(25) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(26) \quad \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x} \quad \psi = \text{Arctg} \frac{r}{z}$$

Exemple 4 :

Un poteau incliné de 30° exerce sur le sol une force de 119×10^4 newtons (268 000 lb). Quelles sont les valeurs du tassement aux points de coordonnées $x = y = 0, z = 7,5$ m (24 ft) et $x = \pm 2,5$ m (8 ft), $y = 6,25$ m (20 ft), $z = 7,5$ m (24 ft) ? Les propriétés du sol sont $E = 22$ bars (46 000 lb/sq.ft) et $\nu = 0,3$.

Calculons en premier lieu les composantes N et T d'après la formule (1) :

$$N = 119 \times 10^4 \times \cos 30^\circ = 103 \times 10^4 \text{ newtons,}$$

$$N = 268\,000 \times \cos 30^\circ = 232\,000 \text{ lb.}$$

$$T = 119 \times 10^4 \times \sin 30^\circ = 59,5 \times 10^4 \text{ newtons}$$

$$T = 268\,000 \times \sin 30^\circ = 134\,000 \text{ lb.}$$

Ensuite, en appliquant la formule (20) on obtient :

— pour $x = y = 0$ et $z = \rho = 7,5 \text{ m (24 ft)}$:

$$w = 3,1 \text{ cm (0,105 ft = 1,25 in.) ,}$$

— pour $x = 2,5 \text{ m (8 ft)}$, $y = 6,25 \text{ m (20 ft)}$ et $z = 7,5 \text{ m (24 ft)}$, il faut d'a-

bord calculer ρ par la formule (25) :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10 \text{ m (33 ft) .}$$

D'où, en appliquant la formule (20) :

$$w = 2 \text{ cm (0,065 ft = 0,8 in.) ,}$$

— pour $x = -2,5 \text{ m (8 ft)}$, $y = 6,25 \text{ m (20 ft)}$ et $z = 7,5 \text{ m (24 ft)}$, on a pour

ρ la même valeur que précédemment.

D'où, d'après la formule (20) :

$$w = 1,75 \text{ cm (0,057 ft = 0,7 in.)}$$

b) Déplacement de la surface du sol

Avec $z = 0$, les formules (18) à (24) se réduisent à :

$$(27) \quad u = \frac{1 + \nu}{2 \pi r E} \left[- (1 - 2 \nu) \frac{xN}{r} + 2 T \left(1 - \nu \frac{y^2}{r^2}\right) \right]$$

$$(28) \quad v = \frac{1 + \nu}{2 \pi E} \frac{y}{r^3} \left[- (1 - 2 \nu) rN + 2 \nu xT \right]$$

$$(29) \quad -u_\psi = w = \frac{1 + \nu}{2 \pi r E} \left[2(1 - \nu) N + (1 - 2 \nu) \frac{xT}{r} \right]$$

$$(30) \quad u_\rho = u_r = \frac{1 + \nu}{2 \pi r E} \left[- (1 - 2 \nu) N + 2 T \cos \theta \right]$$

$$(31) \quad u_\theta = - \frac{1 - \nu^2}{\pi r E} T \sin \theta .$$

Ces expressions étant simples, nous n'estimons pas nécessaire de donner des tables de valeurs numériques.

Exemple 5 :

Quelle est la composante radiale du déplacement de la surface du sol au point de coordonnées $x = y = 2$ m (6,5 ft) provoqué par une force F de 13×10^5 newtons (292 000 lb) inclinée de $+40^\circ$? Les propriétés du sol sont $E = 23$ bars = 23×10^5 newtons/m² (48 000 lb/sq.ft) et $\nu = 0,3$.

Calculons, en premier lieu, les composantes N et T à l'aide de la formule (1) :

$$N = F \cos 40^\circ = 10 \times 10^5 \text{ newtons (225 000 lb),}$$

$$T = F \sin 40^\circ = 8,3 \times 10^5 \text{ newtons (187 000 lb).}$$

Ensuite, calculons r par la formule (25) :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2,8 \text{ m (9 ft) .}$$

En appliquant la formule (30) on obtient alors :

$$u_r = 0,025 \text{ m} = 2,5 \text{ cm ,}$$

$$u_r = 0,083 \text{ ft} = 1 \text{ in.}$$

c) Cas particulier : Force normale ($\delta = 0$)

On a alors $T = 0$ et les formules (20), (21) et (22) donnant les composantes cylindriques du déplacement se simplifient beaucoup. On peut les écrire sous la forme :

$$(32) \quad u_\theta = 0$$

$$(33) \quad u_r = \frac{N}{zE} R_z \quad \text{ou} \quad u_r = \frac{N}{rE} R_r$$

$$(34) \quad w = \frac{N}{zE} Z_z \quad \text{ou} \quad w = \frac{N}{rE} Z_r ,$$

avec :

N : force normale exercée sur le sol,

r, z : coordonnées cylindriques du point où l'on calcule le déplacement (Fig. 2),

E : module d'Young du sol,

u_r : composante radiale du déplacement,

w : composante verticale du déplacement (tassement),

R_r, R_z, Z_r, Z_z : coefficients sans dimensions dont les valeurs numériques sont données dans des tables et graphiques en fonction de v et ψ ,

v : coefficient de Poisson du sol,

$\psi = \text{Arctg } r/z$.

Exemple 6 :

Deux plaques de 30 cm (1 ft) de diamètre distantes, centre à centre, de 1,2 m (4 ft) supportent une charge centrée $N_1 = 50\,000$ newtons (11 250 lb) pour l'une et $N_2 = 30\,000$ newtons (6 750 lb) pour l'autre. On demande le tassement d'un point situé à mi-distance des deux plaques et à 90 cm (3 ft) de profondeur. Les propriétés du sol sont : $E = 25$ bars (52 000 lb/sq.ft) et $v = 0,4$.

On peut faire un premier calcul approché en assimilant ces plaques à des forces concentrées.

Calculons d'abord ψ par la formule (26) :

$$r = 0,6 \text{ m (2 ft)}, \quad z = 0,9 \text{ m (3 ft)}, \quad \psi = \text{Arctg } 2/3 = 34^\circ$$

On lit dans la table, pour $v = 0,4$ et $\psi = 34^\circ$:

$$Z_z = 0,35 .$$

D'où, en appliquant le principe de superposition avec la formule (34) :

$$w = \frac{N_1 + N_2}{zE} Z_z ,$$

$$w = \frac{50\,000 + 30\,000}{0,9 \times 25 \times 10^5} \times 0,35 = 0,012 \text{ m} = 1,2 \text{ cm} ,$$

$$w = \frac{11\,250 + 6\,750}{3 \times 52\,000} \times 0,35 = 0,04 \text{ ft} = 0,5 \text{ in} .$$

(Nota : l'application du principe de superposition aux déplacements radiaux est moins facile car il faut faire une somme vectorielle.)

Enfin, on pourra, à titre de comparaison, refaire le même exercice à l'aide des formules établies dans le cas des fondations circulaires (voir la section : "Fondation circulaire rigide exerçant une charge normale centrée sur un sol homogène d'épaisseur infinie." — Section 3-6 du Chap. 3).

CALCUL DES DEFORMATIONSa) Cas général

Les déformations en tout point du sol sont données par les formules suivantes :

$$(35) \quad \epsilon_x = \frac{(1 + \nu) N}{z^2 E} [I_2 - (1 - 2\nu) I_2'] + \frac{x}{|x|} \frac{(1 + \nu) T}{z^2 E} [I_3 - (1 - 2\nu) I_3']$$

$$(36) \quad \epsilon_y = \frac{(1 + \nu) N}{z^2 E} [J_2 - (1 - 2\nu) J_2'] + \frac{x}{|x|} \frac{(1 + \nu) T}{z^2 E} [I_5 - (1 - 2\nu) I_5']$$

$$(37) \quad \epsilon_z = \frac{(1 + \nu) N}{z^2 E} [I_0 - (1 - 2\nu) I_0'] + \frac{x}{|x|} \frac{(1 + \nu) T}{z^2 E} [I_1 - (1 - 2\nu) I_1']$$

$$(38) \quad \gamma_{xy} = -\frac{xy}{|xy|} \frac{(1 + \nu) N}{z^2 E} [G_4 - (1 - 2\nu) G_4'] + \frac{y}{|y|} \frac{(1 + \nu) T}{z^2 E} [H_3 - (1 - 2\nu) H_3']$$

$$(39) \quad \gamma_{yz} = -\frac{y}{|y|} \frac{(1 + \nu) N}{z^2 E} H_1 + \frac{xy}{|xy|} \frac{(1 + \nu) T}{z^2 E} G_4$$

$$(40) \quad \gamma_{zx} = -\frac{x}{|x|} \frac{(1 + \nu) N}{z^2 E} G_1 + \frac{(1 + \nu) T}{z^2 E} G_2$$

avec :

N, T : composantes normale et tangentielle de la force appliquée,

x, y, z : coordonnées du point où l'on calcule les déformations,

E, ν : module d'Young et coefficient de Poisson du sol,

G, H, I : coefficients sans dimensions dont les valeurs numériques sont données dans des tables et graphiques.

Par ailleurs, le changement de volume est donné par :

$$(41) \quad \epsilon = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\pi E \rho^3} (xT + zN)$$

avec
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Exemple 7 :

Un poteau incliné de 30° exerce sur le sol une force de 119.10^4 newtons (268 000 lb). Les caractéristiques du sol sont $E = 22$ bars = 22×10^5 newtons/m² (46 000 lb/sq.ft) et $\nu = 0,3$. Quelle est la valeur de ϵ_z au point $x = y = 0$ et $z = 7,5$ m (0,25 ft) ?

Calculons d'abord N et T par la formule (1) :

$$N = F \times \cos 30^\circ = 103 \times 10^4 \text{ newtons (232 000 lb) ,}$$

$$T = F \times \sin 30^\circ = 59,5 \times 10^4 \text{ newtons (134 000 lb) .}$$

On lit ensuite, dans les tables, pour $x = y = 0$:

$$I_0 = -0,318 \quad I'_0 = 0,159 \quad I_1 = I'_1 = 0.$$

D'où, en utilisant la formule (37) :

$$\epsilon_z = \frac{1,3 \times 103 \times 10^4}{(7,5)^2 \times 22 \times 10^5} [-0,318 - 0,4 \times 0,159] = -0,004 ,$$

$$\epsilon_z = \frac{1,3 \times 232\,000}{(25)^2 \times 46\,000} [-0,318 - 0,4 \times 0,159] = -0,004 .$$

b) Cas particulier : sol incompressible

Dans ce cas, le coefficient de Poisson, ν , vaut 0,5. On peut alors :

— soit utiliser les formules du cas général avec $(1 - 2\nu) = 0$,

— soit utiliser les coordonnées sphériques :

$$(42) \quad \epsilon_\psi = \epsilon_\theta = \frac{3}{4 \pi E \rho} (N \cos \psi + T \cos \theta \sin \psi)$$

$$(43) \quad \epsilon_\rho = -\frac{3}{2 \pi E \rho} (N \cos \psi + T \cos \theta \sin \psi)$$

(Nota : on trouvera toutes relations entre les différents systèmes de coordonnées au début du volume, dans la section : "Formulaire de Mécanique des Milieux Continus." — Section 1-2 du Chap. 1).

$$(44) \quad \gamma_{\psi\theta} = \gamma_{\theta\rho} = \gamma_{\rho\psi} = 0 .$$

c) Cas particulier : Force normale ($\delta = 0$)

On peut alors :

- soit employer les formules du cas général avec $T = 0$,
- soit utiliser les coordonnées cylindriques (Fig. 2) :

$$(45) \quad \epsilon_r = \frac{1 + \nu}{E} \frac{N}{z^2} [I_2 - (1 - 2\nu) I_2']$$

$$(46) \quad \epsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{E} \frac{N}{z^2} [J_2 - (1 - 2\nu) J_2']$$

$$(47) \quad \epsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} \frac{N}{z^2} [I_0 - (1 - 2\nu) I_0']$$

$$(48) \quad \gamma_{zr} = -\frac{1 + \nu}{E} \frac{N}{z^2} G_1$$

$$(49) \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0 .$$

Les valeurs des coefficients G, I et J sont alors lues dans les tables pour

$$y/z = 0 \quad \text{et} \quad x/z = r/z .$$

Exemple 8 :

Quelle est la valeur de ϵ_θ provoquée par une force concentrée normale de 103×10^4 newtons (232 000 lb) au point de coordonnées $r = 1,8$ m (6 ft) et $z = 4,5$ m (15 ft) sachant que les propriétés du sol sont $E = 26$ bars (54 000 lb/sq.ft) et $\nu = 0,2$?

Pour $y/z = 0$ et $r/z = x/z = 0,4$, on lit dans les tables :

$$J_2 = 0,127 \quad \text{et} \quad J_2' = 0,071 .$$

D'où, en utilisant la formule (46) :

$$\epsilon_\theta = \frac{1,2 \times 103 \times 10^4}{26 \times 10^5 \times (4,5)^2} [0,127 - 0,6 \times 0,071] = 0,002$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1,2 \times 232\,000}{54\,000 \times (15)^2} [0,127 - 0,6 \times 0,071] = 0,002 .$$

d) Déformations et directions principales dans le cas d'une force normale ($\delta = 0$) :

L'une des trois déformations principales que nous appellerons ϵ_2 n'est autre que ϵ_θ . Les deux autres, ϵ_1 et ϵ_3 , sont contenues dans le plan méridien passant par le point considéré. Leur valeur est donnée par :

$$(50) \quad \epsilon_1 = \frac{N}{z^2} \frac{Y_1}{E}$$

$$(51) \quad \epsilon_2 = \frac{N}{z^2} \frac{Y_2}{E}$$

$$(52) \quad \epsilon_3 = \frac{N}{z^2} \frac{Y_3}{E} .$$

Les valeurs numériques des coefficients Y_1 , Y_2 et Y_3 sont données dans une table et un graphique en fonction de ν , coefficient de Poisson du sol, et ψ , angle défini par (17) ou (26).

Enfin, rappelons que *les déformations principales ont même orientation que les contraintes principales correspondantes.*

Exemple 9 :

Quelle est la valeur de ϵ_2 provoquée au point de coordonnées $r = 1,8$ m (6 ft) et $z = 4,5$ m (15 ft) par une force de 103×10^4 newtons exercée normalement à la surface d'un sol de module d'Young 26 bars (54 000 lb/sq.ft) et de coefficient de Poisson $\nu = 0,2$?

Calculons d'abord ψ , d'après (17) ou (26) (Fig. 2) :

$$\psi = \text{Arctg } 0,4 = 22^\circ .$$

Pour $\nu = 0,2$ et $\psi = 22^\circ$, on lit dans la table : $Y_2 = 0,1$.

D'où, en utilisant (51) :

$$\epsilon_2 = \frac{103 \times 10^4}{(4,5)^2 \times 26 \times 10^5} \times 0,1 = 0,002 ,$$

$$\epsilon_2 = \frac{232\,000}{54\,000 \times (15)^2} \times 0,1 = 0,002 .$$

On retrouve bien la même valeur que pour ϵ_θ de l'exemple 8.

TABLES ET GRAPHIQUES— Calcul des contraintes et des déformations

Graphiques des coefficients G et I : pp. 93 et 94.

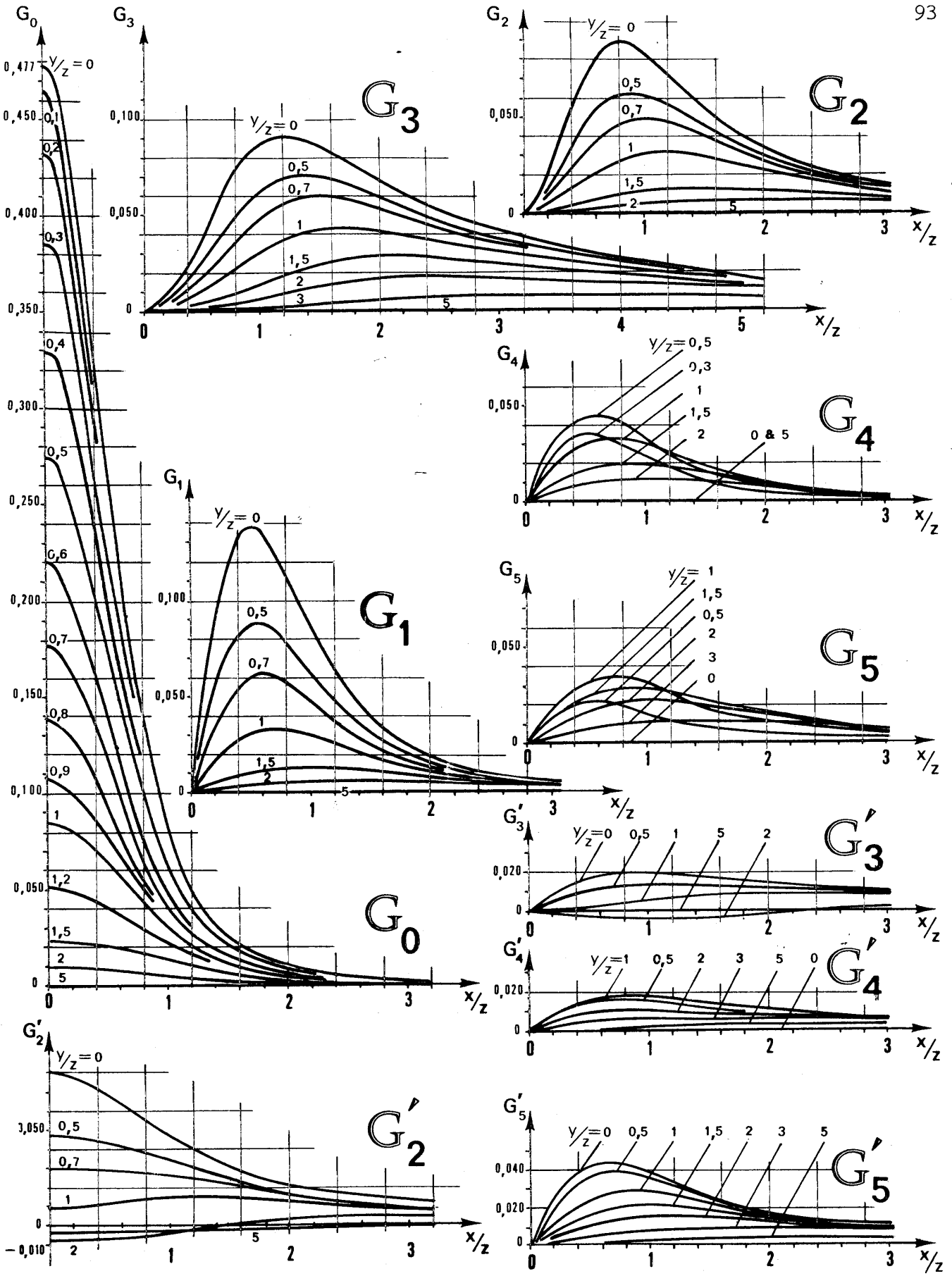
Tables des coefficients G, H, I, J : pp. 95 à 114.

Table et graphique de α : p. 115.

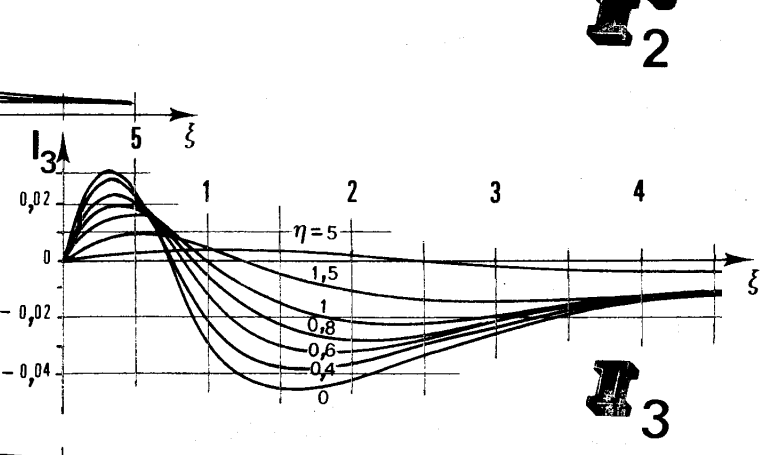
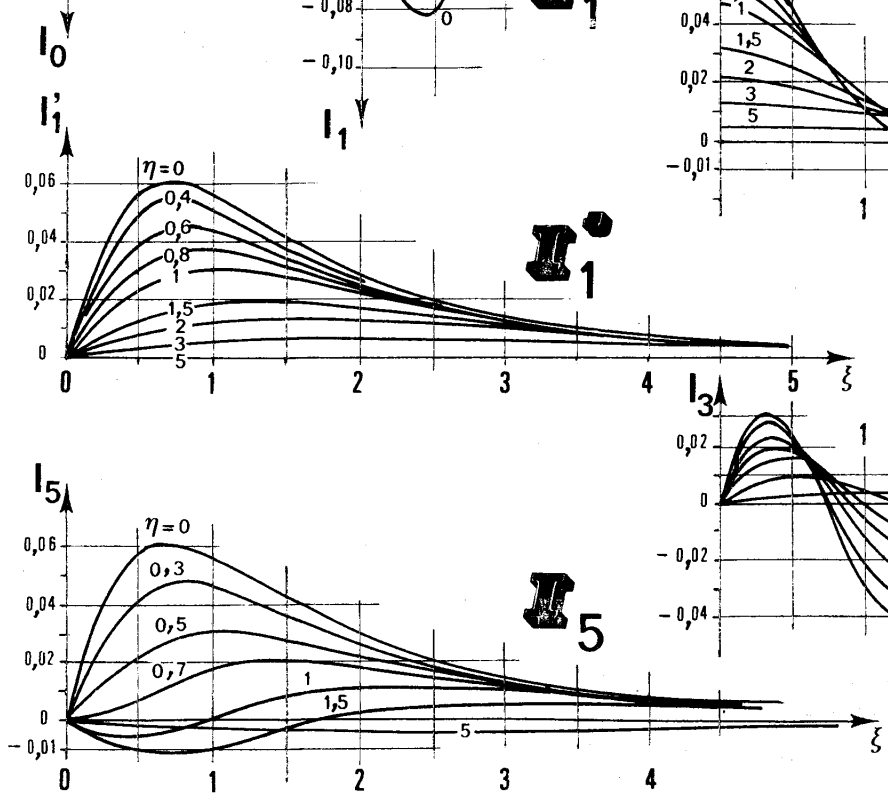
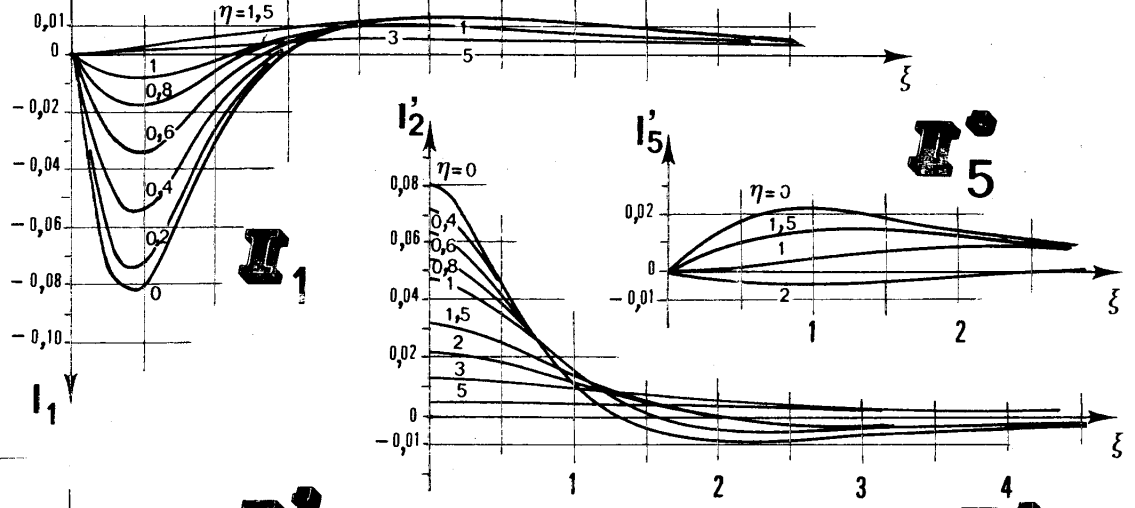
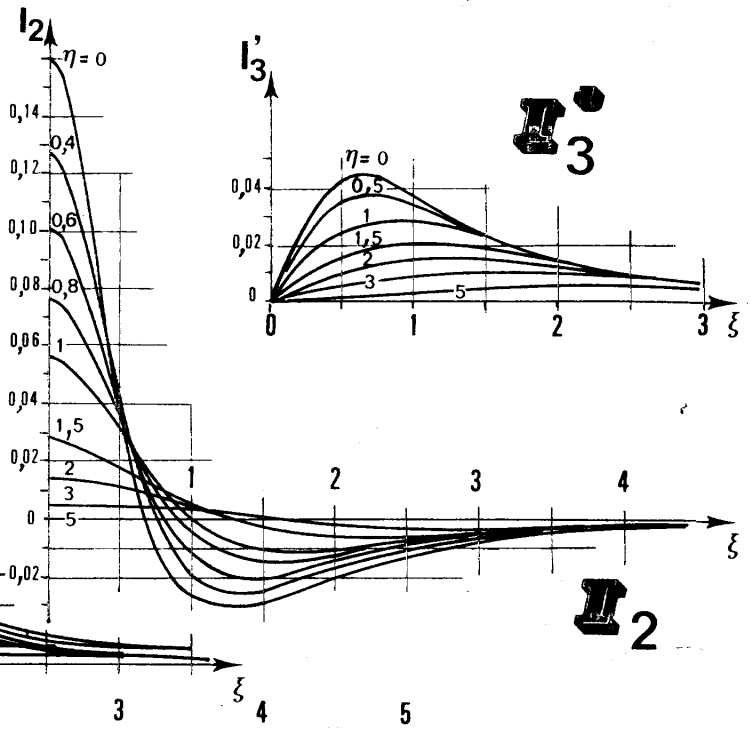
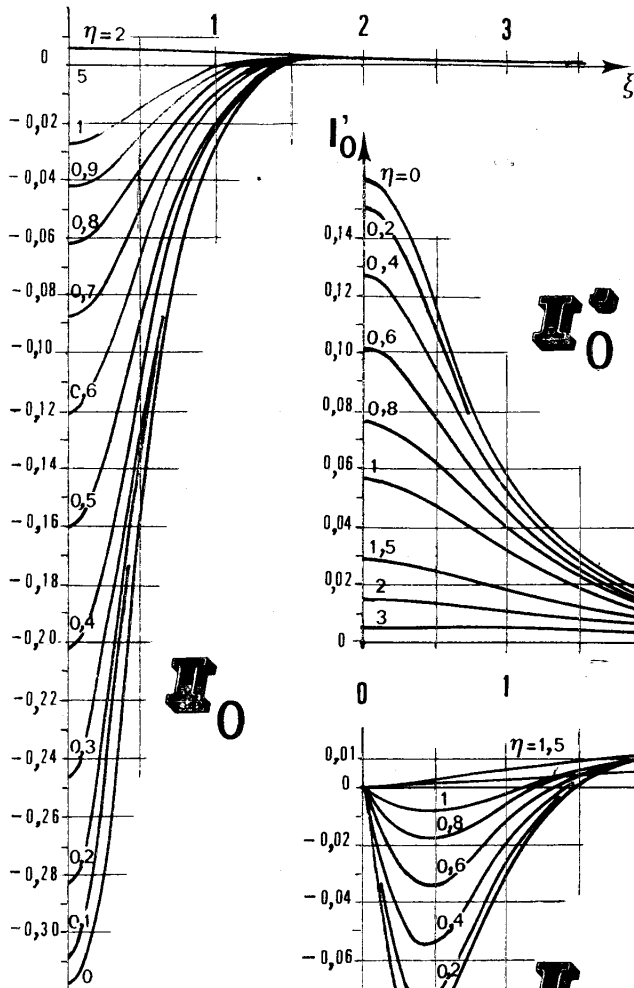
Tables et graphiques de $Z_1, Z_2, Z_3, Y_1, Y_2, Y_3$: p. 116 à 119.

— Calcul des déplacements

Tables et graphiques de R_r, R_z, Z_r, Z_z : pp. 120 à 123.



2-1



G^0	X/Z														
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	5
0	0.477	0.466	0.433	0.385	0.329	0.273	0.221	0.176	0.139	0.108	0.084	0.025	0.009	0.002	0.000
0,1	0.466	0.454	0.423	0.376	0.322	0.268	0.217	0.173	0.137	0.107	0.083	0.025	0.008	0.002	0.000
0,2	0.433	0.423	0.394	0.352	0.303	0.253	0.206	0.165	0.131	0.103	0.080	0.024	0.008	0.001	0.000
0,3	0.385	0.376	0.352	0.316	0.273	0.230	0.189	0.152	0.121	0.096	0.076	0.023	0.008	0.001	0.000
0,4	0.329	0.322	0.303	0.273	0.239	0.202	0.168	0.137	0.110	0.088	0.070	0.022	0.008	0.001	0.000
0,5	0.273	0.268	0.253	0.230	0.202	0.173	0.145	0.120	0.097	0.078	0.063	0.021	0.008	0.001	0.000
0,6	0.221	0.217	0.206	0.189	0.168	0.145	0.123	0.103	0.084	0.069	0.056	0.019	0.007	0.001	0.000
0,7	0.176	0.173	0.165	0.152	0.137	0.120	0.103	0.087	0.072	0.060	0.049	0.018	0.007	0.001	0.000
0,8	0.139	0.137	0.131	0.121	0.103	0.084	0.072	0.061	0.051	0.042	0.036	0.016	0.006	0.001	0.000
0,9	0.108	0.107	0.103	0.096	0.088	0.078	0.069	0.060	0.051	0.043	0.036	0.014	0.006	0.001	0.000
1	0.084	0.083	0.080	0.076	0.070	0.063	0.056	0.049	0.042	0.036	0.031	0.013	0.005	0.001	0.000
1,5	0.025	0.025	0.024	0.023	0.022	0.021	0.019	0.018	0.016	0.014	0.013	0.007	0.003	0.001	0.000
2	0.009	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000
3	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

2-1



G₁		X/Z											H₁			
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1			1,5	2
0	0.000	0.047	0.087	0.115	0.132	0.137	0.133	0.123	0.111	0.097	0.084	0.038	0.017	0.005	0.001	0
0,1	0.000	0.045	0.085	0.113	0.129	0.134	0.130	0.121	0.109	0.096	0.083	0.037	0.017	0.005	0.001	0,1
0,2	0.000	0.042	0.079	0.106	0.121	0.126	0.124	0.115	0.104	0.092	0.080	0.036	0.017	0.004	0.001	0,2
0,3	0.000	0.038	0.070	0.095	0.109	0.115	0.113	0.107	0.097	0.086	0.076	0.035	0.016	0.004	0.001	0,3
0,4	0.000	0.032	0.061	0.082	0.095	0.101	0.101	0.096	0.088	0.079	0.070	0.033	0.016	0.004	0.001	0,4
0,5	0.000	0.027	0.051	0.069	0.081	0.087	0.087	0.084	0.078	0.071	0.063	0.031	0.015	0.004	0.001	0,5
0,6	0.000	0.022	0.041	0.057	0.067	0.073	0.074	0.072	0.068	0.062	0.056	0.029	0.014	0.004	0.001	0,6
0,7	0.000	0.017	0.033	0.046	0.055	0.060	0.062	0.061	0.058	0.054	0.049	0.026	0.014	0.004	0.001	0,7
0,8	0.000	0.014	0.026	0.036	0.044	0.049	0.051	0.050	0.049	0.046	0.042	0.024	0.013	0.004	0.001	0,8
0,9	0.000	0.011	0.021	0.029	0.035	0.039	0.041	0.042	0.041	0.039	0.036	0.022	0.012	0.004	0.001	0,9
1	0.000	0.008	0.016	0.023	0.028	0.031	0.033	0.034	0.034	0.032	0.031	0.019	0.011	0.004	0.001	1
1,5	0.000	0.002	0.005	0.007	0.009	0.010	0.012	0.012	0.013	0.013	0.013	0.010	0.007	0.003	0.001	1,5
2	0.000	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.002	0.000	2
3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	3
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5

G₁

Y/Z

Y/Z

H₁

G²		X/Z											H²		
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1			1,5
0	0,000	0,005	0,017	0,035	0,053	0,068	0,080	0,086	0,089	0,088	0,084	0,056	0,034	0,014	0,003
0,1	0,000	0,005	0,017	0,034	0,052	0,067	0,078	0,085	0,087	0,087	0,083	0,056	0,034	0,014	0,003
0,2	0,000	0,004	0,016	0,032	0,048	0,063	0,074	0,081	0,084	0,083	0,080	0,055	0,033	0,013	0,003
0,3	0,000	0,004	0,014	0,028	0,044	0,057	0,068	0,075	0,078	0,078	0,076	0,053	0,033	0,013	0,003
0,4	0,000	0,003	0,012	0,025	0,038	0,051	0,060	0,067	0,070	0,071	0,070	0,050	0,032	0,013	0,003
0,5	0,000	0,003	0,010	0,021	0,032	0,043	0,052	0,059	0,062	0,063	0,063	0,047	0,030	0,013	0,003
0,6	0,000	0,002	0,008	0,017	0,027	0,036	0,044	0,050	0,054	0,056	0,056	0,043	0,029	0,012	0,003
0,7	0,000	0,002	0,007	0,014	0,022	0,030	0,037	0,042	0,046	0,048	0,049	0,040	0,027	0,012	0,003
0,8	0,000	0,001	0,005	0,011	0,018	0,024	0,030	0,035	0,039	0,041	0,042	0,036	0,025	0,012	0,003
0,9	0,000	0,001	0,004	0,009	0,014	0,020	0,025	0,029	0,033	0,035	0,036	0,032	0,023	0,011	0,003
1	0,000	0,001	0,003	0,007	0,011	0,016	0,020	0,024	0,027	0,029	0,031	0,025	0,022	0,011	0,003
1,5	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,005	0,007	0,009	0,010	0,012	0,013	0,015	0,013	0,008	0,003
2	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,005	0,008	0,008	0,006	0,002
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003	0,002
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001

2-1

G^3		X/Z														
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	5
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0,1	0.000	0.000	0.003	0.010	0.021	0.034	0.048	0.060	0.071	0.079	0.084	0.085	0.068	0.041	0.017	
0,2	0.000	0.000	0.003	0.010	0.021	0.033	0.047	0.059	0.070	0.078	0.083	0.084	0.068	0.041	0.017	
0,3	0.000	0.000	0.003	0.009	0.019	0.032	0.044	0.057	0.067	0.075	0.080	0.082	0.067	0.040	0.017	
0,4	0.000	0.000	0.003	0.009	0.017	0.029	0.041	0.052	0.062	0.070	0.076	0.079	0.065	0.040	0.017	
0,5	0.000	0.000	0.002	0.007	0.015	0.025	0.036	0.047	0.056	0.064	0.070	0.075	0.063	0.039	0.017	
0,6	0.000	0.000	0.002	0.006	0.013	0.022	0.031	0.041	0.050	0.057	0.063	0.070	0.060	0.038	0.017	
0,7	0.000	0.000	0.002	0.005	0.011	0.018	0.027	0.035	0.043	0.050	0.056	0.065	0.057	0.037	0.017	
0,8	0.000	0.000	0.001	0.004	0.009	0.015	0.022	0.030	0.037	0.043	0.049	0.060	0.054	0.036	0.017	
0,9	0.000	0.000	0.001	0.003	0.007	0.012	0.018	0.025	0.031	0.037	0.042	0.054	0.051	0.035	0.016	
1	0.000	0.000	0.001	0.003	0.006	0.010	0.015	0.020	0.026	0.031	0.036	0.049	0.047	0.034	0.016	
1,5	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.012	0.017	0.022	0.026	0.031	0.043	0.043	0.032	0.016	
2	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.004	0.006	0.008	0.010	0.013	0.023	0.027	0.025	0.014	
3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.011	0.016	0.018	0.012	
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.001	0.008	0.003	



G^4		X/Z														
													0	0,1	0,2	0,3
0	0,1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0,2	0,3	0.000	0.005	0.008	0.011	0.013	0.013	0.012	0.011	0.010	0.008	0.008	0.004	0.000	0.000	0.000
0,4	0,5	0.000	0.008	0.016	0.021	0.024	0.025	0.023	0.021	0.018	0.016	0.016	0.007	0.002	0.001	0.000
0,6	0,7	0.000	0.011	0.021	0.028	0.033	0.034	0.032	0.029	0.026	0.023	0.011	0.005	0.001	0.000	0.000
0,8	0,9	0.000	0.013	0.024	0.033	0.038	0.040	0.038	0.035	0.032	0.028	0.013	0.006	0.002	0.000	0.000
1	1,5	0.000	0.013	0.025	0.034	0.040	0.043	0.042	0.040	0.037	0.034	0.019	0.008	0.003	0.001	0.000
2	3	0.000	0.013	0.025	0.034	0.040	0.043	0.042	0.040	0.037	0.034	0.019	0.008	0.003	0.001	0.000
5		0.000	0.013	0.025	0.034	0.040	0.043	0.042	0.040	0.037	0.034	0.019	0.008	0.003	0.001	0.000

2-1

G'_2		X/Z											H'_2		
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1			1,5
0	0,080	0,077	0,077	0,075	0,071	0,067	0,063	0,059	0,054	0,050	0,047	0,031	0,022	0,012	0,005
0,1	0,078	0,077	0,073	0,073	0,070	0,066	0,062	0,058	0,054	0,050	0,046	0,031	0,022	0,012	0,005
0,2	0,073	0,072	0,071	0,069	0,066	0,062	0,059	0,055	0,051	0,048	0,044	0,031	0,022	0,012	0,005
0,3	0,065	0,065	0,064	0,062	0,060	0,057	0,054	0,051	0,048	0,045	0,042	0,029	0,021	0,012	0,005
0,4	0,056	0,056	0,055	0,054	0,052	0,051	0,048	0,046	0,044	0,041	0,039	0,028	0,020	0,012	0,005
0,5	0,047	0,047	0,046	0,045	0,045	0,043	0,042	0,040	0,039	0,037	0,035	0,026	0,019	0,011	0,005
0,6	0,037	0,037	0,037	0,037	0,037	0,036	0,035	0,034	0,033	0,032	0,031	0,024	0,018	0,011	0,005
0,7	0,029	0,029	0,029	0,029	0,029	0,029	0,029	0,029	0,028	0,027	0,027	0,022	0,017	0,011	0,005
0,8	0,021	0,021	0,022	0,022	0,022	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023	0,020	0,016	0,010	0,005
0,9	0,015	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	0,019	0,019	0,019	0,017	0,015	0,010	0,005
1	0,010	0,010	0,010	0,011	0,011	0,012	0,013	0,014	0,014	0,015	0,015	0,015	0,013	0,009	0,005
1,5	-0,004	-0,004	-0,004	-0,003	-0,003	-0,002	-0,001	0,000	0,001	0,002	0,003	0,006	0,007	0,007	0,004
2	-0,008	-0,007	-0,007	-0,007	-0,007	-0,006	-0,006	-0,005	-0,004	-0,003	-0,003	0,001	0,003	0,004	0,002
3	-0,007	-0,007	-0,007	-0,007	-0,007	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006	-0,005	-0,005	-0,003	-0,001	0,001	0,002
5	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,003	-0,003	-0,002	-0,001	0,000



G' 3		X/2											H' 3			
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1			1,5	2
0	0.000	0.004	0.008	0.011	0.014	0.016	0.017	0.019	0.019	0.019	0.019	0.017	0.014	0.009	0.004	0.004
0,1	0.000	0.004	0.007	0.011	0.013	0.015	0.017	0.018	0.019	0.019	0.019	0.017	0.013	0.009	0.004	0.004
0,2	0.000	0.003	0.007	0.010	0.012	0.014	0.016	0.017	0.018	0.018	0.018	0.016	0.013	0.009	0.004	0.004
0,3	0.000	0.003	0.006	0.009	0.011	0.013	0.015	0.016	0.016	0.016	0.016	0.015	0.013	0.008	0.004	0.004
0,4	0.000	0.002	0.005	0.007	0.009	0.011	0.012	0.013	0.014	0.015	0.015	0.014	0.012	0.008	0.004	0.004
0,5	0.000	0.002	0.004	0.005	0.007	0.009	0.010	0.011	0.012	0.012	0.012	0.013	0.011	0.008	0.004	0.004
0,6	0.000	0.001	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.009	0.009	0.009	0.009	0.011	0.010	0.008	0.004	0.004
0,7	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.008	0.010	0.010	0.007	0.004	0.004
0,8	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.004	0.005	0.006	0.006	0.008	0.009	0.007	0.004	0.004
0,9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.006	0.004	0.004
1	-0.000	-0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.002	-0.002	0.000	0.002	0.006	0.003	0.003
1,5	-0.000	-0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	0.000	0.002	0.006	0.003	0.003
2	-0.000	-0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.002	-0.001	0.001	0.002	0.002
3	-0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.002	-0.001	0.001	0.001
5	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.002	-0.001	-0.001
0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	5	

Y/2

Y/2

$G' \substack{4 \\ \sim}$		X/Z														
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	5
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0,1	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.001	0.000
0,2	0.000	0.002	0.004	0.006	0.007	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.003	0.001	0.000
0,3	0.000	0.003	0.006	0.008	0.010	0.011	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.004	0.002	0.001
0,4	0.000	0.004	0.007	0.010	0.012	0.013	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.004	0.002	0.001
0,5	0.000	0.004	0.008	0.011	0.013	0.015	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.004	0.002	0.001
0,6	0.000	0.004	0.008	0.011	0.014	0.016	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.004	0.002	0.001
0,7	0.000	0.004	0.008	0.012	0.014	0.016	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.004	0.002	0.001
0,8	0.000	0.004	0.008	0.011	0.014	0.016	0.018	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.004	0.002	0.001
0,9	0.000	0.004	0.008	0.011	0.014	0.016	0.018	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.004	0.002	0.001
1	0.000	0.004	0.007	0.010	0.012	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.004	0.002	0.001
1,5	0.000	0.004	0.007	0.010	0.012	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.004	0.002	0.001
2	0.000	0.004	0.007	0.010	0.012	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.004	0.002	0.001
3	0.000	0.004	0.007	0.010	0.012	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.004	0.002	0.001
5	0.000	0.004	0.007	0.010	0.012	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.004	0.002	0.001

2-1

G'_5		X/Z														
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	5
0	0.000	0.012	0.022	0.031	0.037	0.041	0.043	0.043	0.042	0.042	0.039	0.037	0.024	0.015	0.006	0.002
0,1	0.000	0.012	0.022	0.031	0.037	0.041	0.043	0.043	0.042	0.041	0.039	0.037	0.024	0.015	0.006	0.002
0,2	0.000	0.011	0.022	0.030	0.036	0.040	0.042	0.042	0.041	0.041	0.039	0.037	0.024	0.015	0.006	0.002
0,3	0.000	0.011	0.021	0.029	0.035	0.039	0.041	0.041	0.040	0.040	0.038	0.036	0.024	0.015	0.006	0.002
0,4	0.000	0.010	0.019	0.027	0.033	0.037	0.039	0.039	0.039	0.039	0.037	0.035	0.024	0.015	0.006	0.002
0,5	0.000	0.009	0.018	0.025	0.031	0.035	0.037	0.038	0.037	0.037	0.036	0.034	0.024	0.015	0.007	0.002
0,6	0.000	0.009	0.017	0.023	0.029	0.033	0.035	0.036	0.036	0.036	0.035	0.033	0.023	0.015	0.007	0.002
0,7	0.000	0.008	0.015	0.021	0.027	0.030	0.033	0.034	0.034	0.034	0.033	0.032	0.023	0.015	0.007	0.002
0,8	0.000	0.007	0.014	0.020	0.024	0.028	0.030	0.032	0.032	0.032	0.032	0.031	0.023	0.015	0.007	0.002
0,9	0.000	0.006	0.012	0.018	0.022	0.026	0.028	0.029	0.029	0.030	0.030	0.029	0.022	0.015	0.007	0.002
1	0.000	0.006	0.011	0.016	0.020	0.023	0.026	0.027	0.028	0.028	0.028	0.028	0.022	0.015	0.007	0.002
1,5	0.000	0.003	0.007	0.010	0.012	0.015	0.017	0.018	0.018	0.019	0.020	0.020	0.018	0.014	0.008	0.002
2	0.000	0.002	0.004	0.006	0.008	0.009	0.011	0.012	0.012	0.013	0.014	0.014	0.015	0.013	0.008	0.003
3	0.000	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.005	0.006	0.006	0.006	0.007	0.007	0.009	0.009	0.007	0.003
5	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.003



I 0		$\times/2$													
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3
0,1	-0.318	-0.309	-0.283	-0.245	-0.202	-0.159	-0.121	-0.089	-0.063	-0.043	-0.028	0.002	0.006	0.004	0.001
0,2	-0.305	-0.300	-0.275	-0.238	-0.197	-0.155	-0.118	-0.087	-0.061	-0.042	-0.028	0.002	0.006	0.004	0.001
0,3	-0.283	-0.275	-0.252	-0.219	-0.182	-0.144	-0.110	-0.081	-0.057	-0.039	-0.026	0.002	0.006	0.004	0.001
0,4	-0.245	-0.238	-0.219	-0.192	-0.159	-0.127	-0.097	-0.072	-0.051	-0.035	-0.023	0.003	0.006	0.003	0.001
0,5	-0.202	-0.197	-0.182	-0.159	-0.134	-0.107	-0.083	-0.061	-0.044	-0.030	-0.019	0.003	0.006	0.003	0.001
0,6	-0.159	-0.155	-0.144	-0.127	-0.107	-0.087	-0.067	-0.050	-0.036	-0.025	-0.016	0.003	0.006	0.003	0.001
0,7	-0.121	-0.118	-0.110	-0.097	-0.083	-0.067	-0.053	-0.039	-0.028	-0.019	-0.012	0.004	0.006	0.003	0.001
0,8	-0.089	-0.087	-0.081	-0.072	-0.061	-0.050	-0.039	-0.029	-0.021	-0.014	-0.008	0.004	0.006	0.003	0.001
0,9	-0.063	-0.061	-0.057	-0.051	-0.044	-0.036	-0.028	-0.021	-0.015	-0.009	-0.005	0.005	0.005	0.003	0.001
1	-0.043	-0.042	-0.039	-0.035	-0.030	-0.025	-0.021	-0.014	-0.009	-0.005	-0.002	0.005	0.005	0.003	0.001
1,5	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.003	0.001
2	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.003	0.001
3	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.002	0.001
5	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000

2-1

I 1		$\times/2$													
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3
0	-0.000	-0.031	-0.057	-0.074	-0.081	-0.080	-0.073	-0.062	-0.050	-0.039	-0.028	0.003	0.011	0.011	0.005
0,1	-0.000	-0.030	-0.055	-0.071	-0.079	-0.078	-0.071	-0.061	-0.049	-0.038	-0.028	0.003	0.011	0.011	0.005
0,2	-0.000	-0.027	-0.050	-0.066	-0.073	-0.072	-0.066	-0.057	-0.046	-0.035	-0.026	0.004	0.011	0.011	0.005
0,3	-0.000	-0.024	-0.044	-0.057	-0.064	-0.064	-0.058	-0.050	-0.041	-0.032	-0.023	0.004	0.011	0.010	0.005
0,4	-0.000	-0.020	-0.036	-0.048	-0.053	-0.054	-0.050	-0.043	-0.035	-0.027	-0.019	0.005	0.011	0.010	0.005
0,5	-0.000	-0.016	-0.029	-0.038	-0.043	-0.043	-0.040	-0.035	-0.029	-0.022	-0.016	0.005	0.011	0.010	0.005
0,6	-0.000	-0.012	-0.022	-0.029	-0.033	-0.034	-0.032	-0.028	-0.023	-0.017	-0.012	0.006	0.011	0.010	0.005
0,7	-0.000	-0.009	-0.016	-0.022	-0.025	-0.025	-0.024	-0.021	-0.017	-0.012	-0.008	0.007	0.011	0.010	0.005
0,8	-0.000	-0.006	-0.011	-0.015	-0.018	-0.018	-0.017	-0.015	-0.012	-0.008	-0.005	0.007	0.011	0.010	0.005
0,9	-0.000	-0.004	-0.008	-0.011	-0.012	-0.012	-0.011	-0.010	-0.007	-0.005	-0.002	0.008	0.011	0.010	0.005
1	-0.000	-0.003	-0.005	-0.007	-0.008	-0.008	-0.007	-0.006	-0.004	-0.002	0.000	0.008	0.011	0.010	0.005
1,5	-0.000	-0.000	-0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.005	0.008	0.010	0.008	0.005
2	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.007	0.008	0.007	0.004
3	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.004	0.005	0.005	0.004
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002

2-1

I ₁	x/2														
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	5
0	0.000	0.016	0.030	0.042	0.051	0.057	0.060	0.061	0.061	0.061	0.056	0.041	0.028	0.015	0.006
0,1	0.000	0.015	0.030	0.041	0.050	0.056	0.060	0.061	0.060	0.058	0.056	0.041	0.028	0.015	0.006
0,2	0.000	0.015	0.028	0.040	0.048	0.054	0.058	0.059	0.058	0.057	0.055	0.040	0.028	0.015	0.006
0,3	0.000	0.014	0.026	0.037	0.046	0.051	0.055	0.056	0.056	0.055	0.053	0.039	0.028	0.015	0.006
0,4	0.000	0.013	0.024	0.034	0.042	0.048	0.051	0.053	0.053	0.052	0.050	0.038	0.027	0.015	0.006
0,5	0.000	0.011	0.022	0.031	0.038	0.043	0.047	0.049	0.049	0.048	0.047	0.036	0.026	0.015	0.006
0,6	0.000	0.010	0.019	0.027	0.034	0.039	0.042	0.044	0.045	0.045	0.044	0.035	0.026	0.014	0.006
0,7	0.000	0.009	0.017	0.024	0.030	0.035	0.038	0.040	0.041	0.041	0.041	0.033	0.025	0.014	0.006
0,8	0.000	0.008	0.015	0.021	0.026	0.031	0.034	0.036	0.037	0.037	0.037	0.031	0.024	0.014	0.006
0,9	0.000	0.006	0.013	0.018	0.023	0.027	0.030	0.032	0.033	0.034	0.034	0.029	0.023	0.013	0.006
1	0.000	0.006	0.011	0.016	0.020	0.024	0.026	0.028	0.030	0.030	0.031	0.027	0.022	0.013	0.006
1,5	0.000	0.003	0.005	0.008	0.010	0.012	0.014	0.015	0.0	0.018	0.018	0.019	0.016	0.011	0.005
2	0.000	0.001	0.003	0.004	0.005	0.007	0.008	0.009	0.010	0.010	0.011	0.012	0.012	0.009	0.005
3	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.006	0.006	0.006	0.004
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002

I 2		X/Z										J 2				
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9			1	1,5	2
0	0.155	0.133	0.105	0.075	0.046	0.021	0.001	-0.013	-0.028	-0.046	-0.066	-0.088	-0.112	-0.138	-0.166	-0.194
0,1	0.157	0.131	0.104	0.074	0.046	0.021	0.002	-0.012	-0.028	-0.046	-0.066	-0.088	-0.112	-0.138	-0.166	-0.194
0,2	0.150	0.126	0.101	0.073	0.045	0.022	0.003	-0.010	-0.026	-0.044	-0.063	-0.084	-0.106	-0.129	-0.153	-0.177
0,3	0.144	0.118	0.096	0.070	0.045	0.023	0.006	-0.008	-0.023	-0.040	-0.058	-0.077	-0.097	-0.118	-0.139	-0.161
0,4	0.140	0.123	0.109	0.089	0.067	0.044	0.025	-0.004	-0.019	-0.036	-0.054	-0.073	-0.093	-0.114	-0.135	-0.156
0,5	0.114	0.110	0.099	0.082	0.063	0.043	0.026	0.011	-0.016	-0.033	-0.050	-0.068	-0.086	-0.104	-0.122	-0.140
0,6	0.100	0.097	0.088	0.074	0.058	0.042	0.026	0.013	0.002	-0.006	-0.021	-0.036	-0.051	-0.066	-0.081	-0.096
0,7	0.088	0.085	0.078	0.066	0.053	0.039	0.026	0.015	0.005	-0.003	-0.018	-0.033	-0.048	-0.063	-0.078	-0.093
0,8	0.076	0.074	0.068	0.059	0.048	0.037	0.026	0.016	0.007	0.000	-0.015	-0.030	-0.045	-0.060	-0.075	-0.090
0,9	0.065	0.064	0.059	0.052	0.044	0.034	0.025	0.016	0.009	0.003	-0.013	-0.028	-0.043	-0.058	-0.073	-0.088
1	0.056	0.055	0.051	0.046	0.039	0.031	0.024	0.017	0.010	0.005	-0.011	-0.026	-0.041	-0.056	-0.071	-0.086
1,5	0.027	0.027	0.024	0.022	0.019	0.016	0.013	0.011	0.010	0.008	0.005	-0.003	-0.015	-0.027	-0.039	-0.051
2	0.014	0.014	0.013	0.012	0.011	0.010	0.009	0.008	0.007	0.007	0.005	0.001	-0.002	-0.013	-0.024	-0.035
3	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
4	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
5																

2-1

I' 2		X/2										J' 2			
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9			1	1,5
0	0.080	0.078	0.073	0.065	0.056	0.047	0.037	0.029	0.021	0.015	0.010	-0.004	-0.008	-0.007	-0.004
0,1	0.075	0.077	0.072	0.065	0.056	0.047	0.037	0.029	0.021	0.015	0.010	-0.004	-0.008	-0.007	-0.004
0,2	0.077	0.076	0.071	0.064	0.055	0.046	0.037	0.029	0.022	0.015	0.010	-0.004	-0.007	-0.007	-0.004
0,3	0.075	0.073	0.069	0.062	0.054	0.045	0.037	0.029	0.022	0.016	0.011	-0.003	-0.007	-0.007	-0.004
0,4	0.071	0.070	0.066	0.060	0.052	0.045	0.037	0.029	0.022	0.016	0.011	-0.003	-0.007	-0.007	-0.004
0,5	0.067	0.066	0.062	0.057	0.051	0.043	0.036	0.029	0.023	0.017	0.012	-0.002	-0.006	-0.006	-0.004
0,6	0.063	0.062	0.059	0.054	0.048	0.042	0.035	0.029	0.023	0.018	0.013	-0.001	-0.006	-0.006	-0.004
0,7	0.055	0.058	0.055	0.051	0.046	0.040	0.034	0.029	0.023	0.018	0.014	0.000	-0.005	-0.006	-0.004
0,8	0.054	0.054	0.051	0.048	0.044	0.039	0.033	0.028	0.023	0.019	0.014	0.001	-0.004	-0.006	-0.004
0,9	0.050	0.050	0.048	0.045	0.041	0.037	0.032	0.027	0.023	0.019	0.015	0.002	-0.003	-0.005	-0.004
1	0.047	0.046	0.044	0.042	0.039	0.035	0.031	0.027	0.023	0.019	0.015	0.003	-0.003	-0.005	-0.003
1,5	0.031	0.031	0.031	0.029	0.028	0.026	0.024	0.022	0.020	0.017	0.015	0.006	0.001	-0.003	-0.003
2	0.022	0.022	0.022	0.021	0.020	0.019	0.018	0.017	0.016	0.015	0.013	0.007	0.003	-0.001	-0.002
3	0.012	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011	0.011	0.011	0.010	0.010	0.009	0.007	0.004	0.001	-0.001
4	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.003	0.002	0.000

X/2

J' 2

X/2

Y/2

I' 2

Y/2

3		$\times \frac{1}{2}$														
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	5
0	0,1	0,000	0,015	0,027	0,032	0,030	0,023	0,012	0,001	-0,010	-0,020	-0,028	-0,044	-0,040	-0,026	-0,011
0,1	0,2	0,000	0,015	0,026	0,031	0,030	0,023	0,013	0,001	-0,010	-0,020	-0,028	-0,043	-0,040	-0,026	-0,011
0,2	0,3	0,000	0,014	0,025	0,030	0,029	0,023	0,013	0,002	-0,008	-0,018	-0,026	-0,042	-0,039	-0,025	-0,011
0,3	0,4	0,000	0,013	0,024	0,029	0,028	0,023	0,014	0,004	-0,006	-0,015	-0,023	-0,040	-0,038	-0,025	-0,011
0,4	0,5	0,000	0,012	0,022	0,027	0,027	0,022	0,015	0,006	-0,004	-0,012	-0,019	-0,037	-0,036	-0,024	-0,011
0,5	0,6	0,000	0,011	0,020	0,025	0,025	0,022	0,015	0,008	-0,001	-0,009	-0,016	-0,034	-0,034	-0,024	-0,011
0,6	0,7	0,000	0,010	0,018	0,022	0,023	0,021	0,016	0,009	0,002	-0,005	-0,012	-0,030	-0,032	-0,023	-0,011
0,7	0,8	0,000	0,008	0,016	0,020	0,021	0,020	0,016	0,010	0,004	-0,002	-0,008	-0,027	-0,029	-0,022	-0,011
0,8	0,9	0,000	0,007	0,014	0,018	0,019	0,018	0,016	0,011	0,006	0,000	-0,005	-0,023	-0,027	-0,021	-0,011
0,9	1	0,000	0,006	0,012	0,016	0,017	0,017	0,015	0,012	0,007	0,002	-0,002	-0,019	-0,024	-0,020	-0,010
1	1,5	0,000	0,006	0,010	0,014	0,016	0,016	0,014	0,012	0,008	0,004	-0,000	-0,016	-0,022	-0,019	-0,010
1,5	2	0,000	0,003	0,005	0,007	0,009	0,010	0,010	0,009	0,008	0,007	0,005	-0,004	-0,011	-0,013	-0,009
2	3	0,000	0,001	0,003	0,004	0,005	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,001	-0,004	-0,008	-0,007
3	5	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,002	0,001	-0,002	-0,004
4		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	-0,001

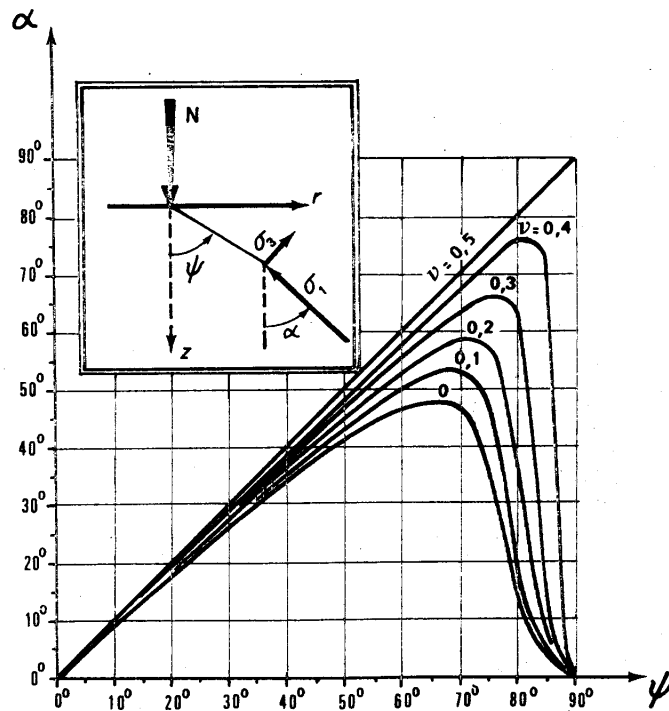
2-1

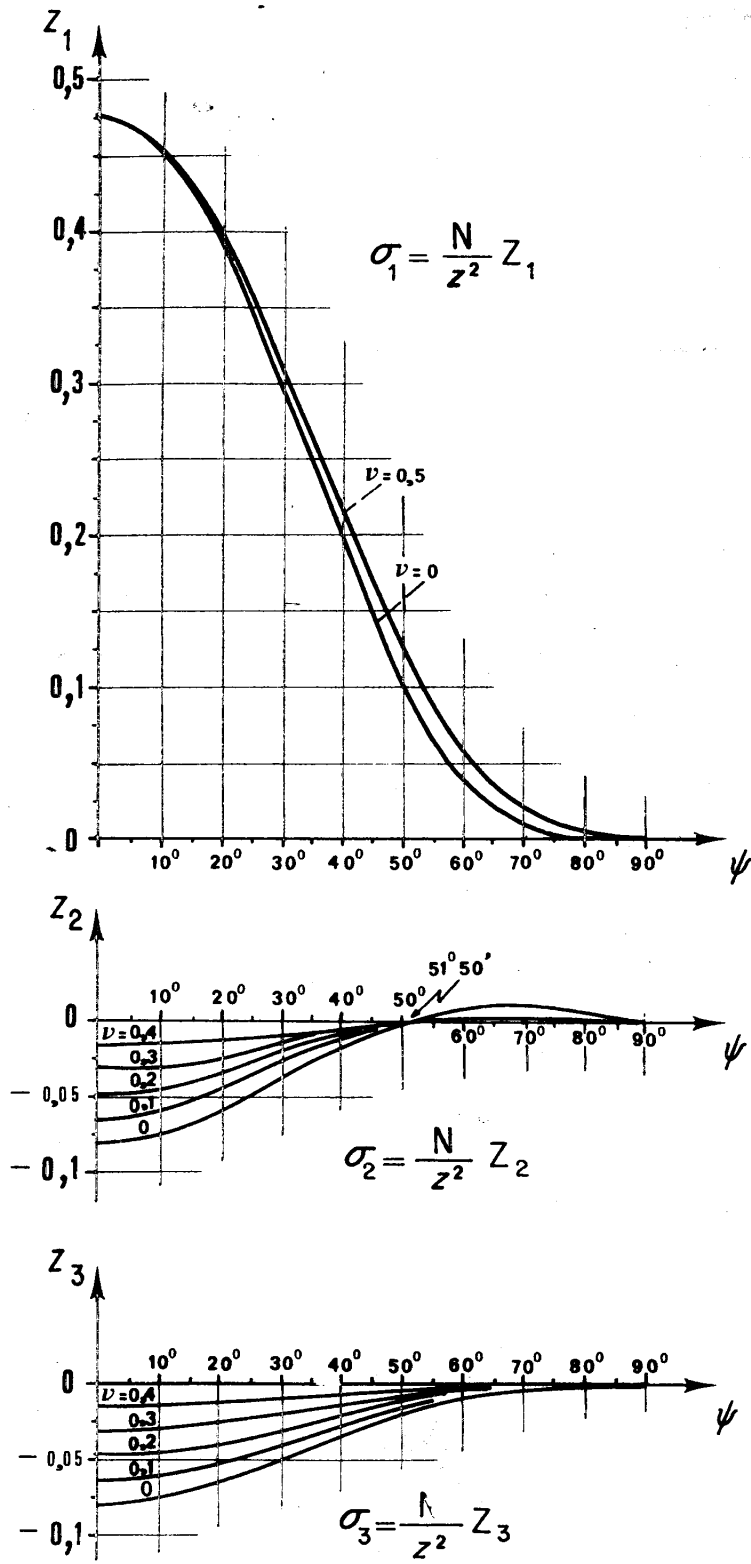
I 5		$\lambda/2$														
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	5
0	-0.000	0.016	0.030	0.042	0.051	0.057	0.060	0.061	0.061	0.059	0.057	0.056	0.041	0.028	0.015	0.006
0,1	-0.000	0.015	0.029	0.040	0.049	0.055	0.058	0.059	0.059	0.057	0.055	0.055	0.040	0.028	0.015	0.006
0,2	-0.000	0.013	0.025	0.036	0.044	0.049	0.053	0.054	0.054	0.053	0.051	0.051	0.039	0.027	0.015	0.006
0,3	-0.000	0.010	0.020	0.029	0.036	0.041	0.045	0.047	0.047	0.047	0.046	0.046	0.036	0.026	0.014	0.006
0,4	-0.000	0.007	0.015	0.021	0.027	0.031	0.035	0.037	0.039	0.039	0.035	0.035	0.033	0.025	0.014	0.006
0,5	-0.000	0.005	0.009	0.014	0.018	0.022	0.025	0.028	0.030	0.031	0.031	0.031	0.029	0.023	0.013	0.006
0,6	-0.000	0.002	0.004	0.007	0.010	0.013	0.016	0.018	0.021	0.023	0.023	0.024	0.024	0.020	0.013	0.006
0,7	-0.000	0.000	0.001	0.002	0.003	0.005	0.008	0.010	0.013	0.015	0.015	0.017	0.020	0.018	0.012	0.006
0,8	-0.000	-0.001	-0.002	-0.002	-0.002	-0.000	0.001	0.004	0.006	0.008	0.008	0.010	0.016	0.016	0.011	0.005
0,9	-0.000	-0.002	-0.004	-0.005	-0.005	-0.005	-0.004	-0.002	0.000	0.002	0.002	0.005	0.012	0.013	0.010	0.005
1	-0.000	-0.003	-0.005	-0.007	-0.008	-0.008	-0.007	-0.006	-0.004	-0.002	-0.002	0.000	0.008	0.011	0.010	0.005
1,5	-0.000	-0.003	-0.006	-0.008	-0.010	-0.011	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.011	-0.011	-0.004	0.001	0.005	0.004
2	-0.000	-0.002	-0.004	-0.006	-0.007	-0.009	-0.010	-0.010	-0.011	-0.011	-0.011	-0.011	-0.008	-0.004	0.001	0.003
3	-0.000	-0.001	-0.002	-0.002	-0.003	-0.004	-0.005	-0.005	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.007	-0.006	-0.002	0.001
4	-0.000	-0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.001

2-1

Valeurs de α						
ψ	$V=0$	$V=0.1$	$V=0.2$	$V=0.3$	$V=0.4$	$V=0.5$
0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
5°	4.28°	4.41°	4.54°	4.69°	4.84°	5°
10°	8.56°	8.82°	9.09°	9.37°	9.68°	10°
15°	12.82°	13.21°	13.62°	14.05°	14.51°	15°
20°	17.06°	17.58°	18.14°	18.73°	19.34°	20°
25°	21.25°	21.93°	22.64°	23.39°	24.17°	25°
30°	25.40°	26.24°	27.12°	28.04°	29.00°	30°
35°	29.48°	30.50°	31.56°	32.67°	33.81°	35°
40°	33.45°	34.68°	35.96°	37.27°	38.62°	40°
45°	37.28°	38.77°	40.30°	41.85°	43.42°	45°
50°	40.90°	42.71°	44.54°	46.38°	48.20°	50°
55°	44.17°	46.42°	48.65°	50.84°	52.96°	55°
60°	46.84°	49.73°	52.54°	55.20°	57.70°	60°
65°	48.29°	52.29°	56.02°	59.40°	62.39°	65°
70°	46.77°	53.03°	58.60°	63.25°	67.00°	70°
75°	36.28°	47.72°	58.38°	66.21°	71.46°	75°
80°	13.09°	21.42°	41.53°	64.92°	75.41°	80°
85°	1.96°	2.71°	4.38°	11.17°	74.15°	85°
90°	0°	0°	0°	0°	0°	90°

2-1

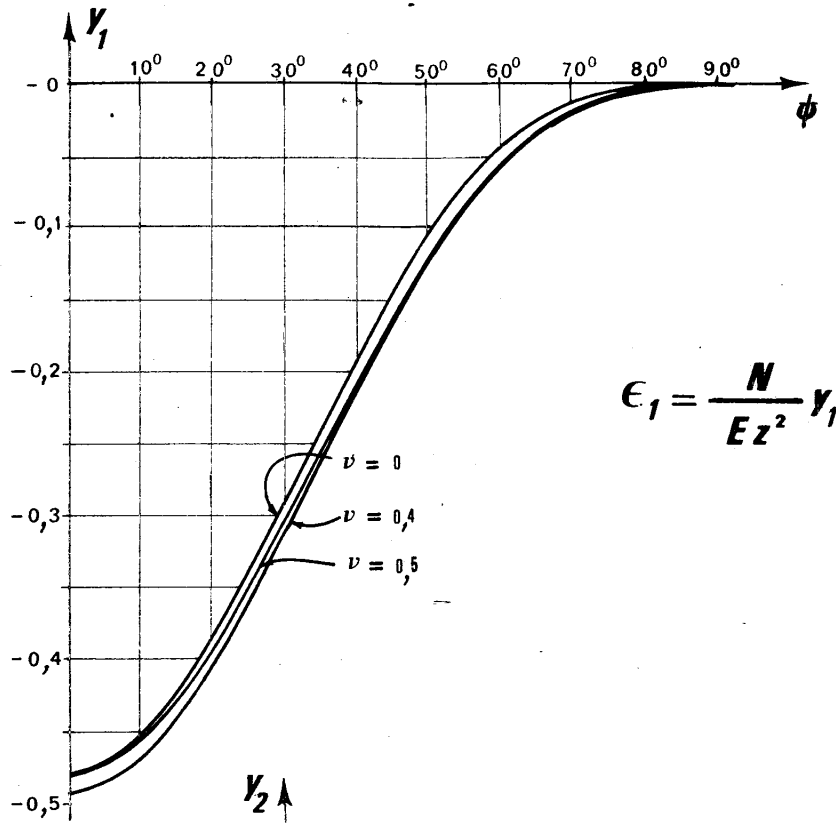




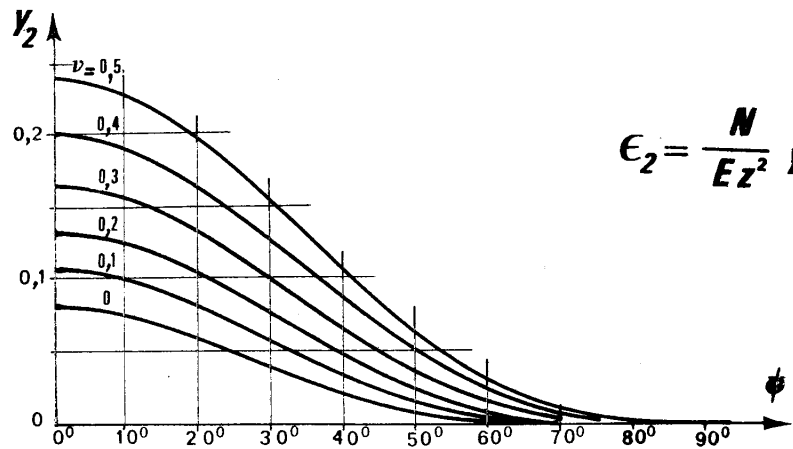
FORCE CONCENTREE NORMALE
 Calcul des contraintes principales
 (voir tableau ci-contre)

ψ z	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
	z	0.477	0.472	0.454	0.426	0.389	0.345	0.296	0.246	0.196	0.149	0.106	0.071	0.042	0.022	0.009	0.002	0.000	0.000
Z ₁	0.477	0.472	0.454	0.427	0.390	0.347	0.299	0.249	0.199	0.152	0.110	0.074	0.045	0.024	0.010	0.003	0.000	0.000	0.000
Z ₂	-0.080	-0.078	-0.074	-0.068	-0.060	-0.050	-0.039	-0.029	-0.019	-0.010	-0.002	0.003	0.007	0.008	0.008	0.006	0.003	0.001	0.000
Z ₃	-0.080	-0.079	-0.076	-0.071	-0.065	-0.058	-0.050	-0.042	-0.034	-0.026	-0.020	-0.014	-0.009	-0.006	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000
Z ₁	0.477	0.472	0.454	0.427	0.390	0.347	0.299	0.249	0.199	0.152	0.110	0.074	0.045	0.024	0.010	0.003	0.000	0.000	0.000
Z ₂	-0.064	-0.063	-0.059	-0.054	-0.048	-0.040	-0.032	-0.023	-0.015	-0.008	-0.002	0.003	0.005	0.006	0.006	0.005	0.003	0.001	0.000
Z ₃	-0.064	-0.063	-0.061	-0.057	-0.052	-0.046	-0.040	-0.033	-0.027	-0.021	-0.015	-0.011	-0.007	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000
Z ₁	0.477	0.472	0.455	0.428	0.392	0.349	0.301	0.252	0.203	0.156	0.114	0.078	0.049	0.027	0.012	0.004	0.000	0.000	0.000
Z ₂	-0.048	-0.047	-0.045	-0.041	-0.036	-0.030	-0.024	-0.017	-0.011	-0.006	-0.001	0.002	0.004	0.005	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000
Z ₃	-0.048	-0.047	-0.045	-0.043	-0.039	-0.034	-0.030	-0.025	-0.020	-0.015	-0.011	-0.008	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000
Z ₁	0.477	0.472	0.455	0.428	0.393	0.351	0.304	0.255	0.206	0.160	0.118	0.082	0.052	0.030	0.014	0.005	0.001	0.000	0.000
Z ₂	-0.032	-0.031	-0.030	-0.027	-0.024	-0.020	-0.016	-0.012	-0.007	-0.004	-0.001	0.001	0.003	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
Z ₃	-0.032	-0.031	-0.030	-0.028	-0.026	-0.023	-0.020	-0.016	-0.013	-0.010	-0.007	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
Z ₁	0.477	0.472	0.456	0.429	0.395	0.353	0.307	0.259	0.210	0.164	0.122	0.086	0.056	0.033	0.017	0.007	0.002	0.000	0.000
Z ₂	-0.016	-0.016	-0.015	-0.014	-0.012	-0.010	-0.008	-0.006	-0.004	-0.002	-0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
Z ₃	-0.016	-0.016	-0.015	-0.014	-0.013	-0.011	-0.010	-0.008	-0.006	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
Z ₁	0.477	0.472	0.456	0.430	0.396	0.355	0.310	0.262	0.215	0.169	0.127	0.090	0.060	0.036	0.019	0.008	0.003	0.000	0.000
Z ₂	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Z ₃	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

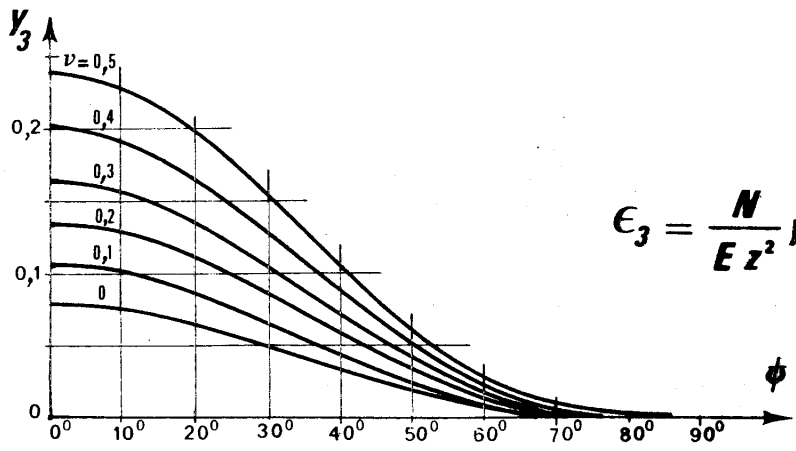
2-1



$$\epsilon_1 = \frac{N}{Ez^2} y_1$$



$$\epsilon_2 = \frac{N}{Ez^2} y_2$$



$$\epsilon_3 = \frac{N}{Ez^2} y_3$$

ψ		0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
y	y_1	-0.477	-0.472	-0.454	-0.426	-0.389	-0.345	-0.296	-0.246	-0.196	-0.149	-0.106	-0.071	-0.042	-0.022	-0.009	-0.002	-0.000	-0.000	0.000
	y_2	0.080	0.078	0.074	0.068	0.060	0.050	0.039	0.029	0.019	0.010	0.002	-0.003	-0.007	-0.008	-0.008	-0.006	-0.003	-0.001	-0.000
	y_3	0.080	0.079	0.076	0.071	0.065	0.058	0.050	0.042	0.034	0.026	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.002	0.002	0.001	0.000
y	y_1	-0.490	-0.484	-0.466	-0.438	-0.400	-0.355	-0.306	-0.254	-0.203	-0.155	-0.112	-0.075	-0.046	-0.024	-0.010	-0.003	-0.000	0.000	0.000
	y_2	0.105	0.103	0.099	0.091	0.082	0.070	0.057	0.045	0.032	0.021	0.011	0.004	-0.001	-0.004	-0.005	-0.004	-0.003	-0.001	-0.000
	y_3	0.105	0.104	0.100	0.094	0.086	0.077	0.067	0.056	0.045	0.035	0.026	0.018	0.012	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000
y	y_1	-0.497	-0.491	-0.473	-0.444	-0.406	-0.362	-0.312	-0.260	-0.209	-0.160	-0.116	-0.079	-0.049	-0.027	-0.012	-0.003	-0.000	0.000	0.000
	y_2	0.134	0.132	0.126	0.118	0.106	0.093	0.078	0.063	0.048	0.034	0.022	0.012	0.005	0.000	-0.002	-0.003	-0.002	-0.001	-0.000
	y_3	0.134	0.132	0.127	0.120	0.110	0.098	0.085	0.072	0.058	0.045	0.034	0.024	0.015	0.009	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000
y	y_1	-0.497	-0.491	-0.473	-0.445	-0.408	-0.364	-0.315	-0.263	-0.212	-0.164	-0.120	-0.083	-0.052	-0.029	-0.014	-0.005	-0.001	0.000	0.000
	y_2	0.166	0.163	0.157	0.147	0.134	0.118	0.101	0.083	0.066	0.049	0.034	0.022	0.012	0.005	0.001	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000
	y_3	0.166	0.164	0.158	0.149	0.137	0.122	0.106	0.089	0.073	0.057	0.042	0.030	0.019	0.012	0.006	0.003	0.001	0.000	0.000
y	y_1	-0.490	-0.484	-0.468	-0.440	-0.404	-0.362	-0.314	-0.264	-0.214	-0.167	-0.124	-0.086	-0.056	-0.033	-0.016	-0.006	-0.001	-0.000	0.000
	y_2	0.201	0.198	0.191	0.180	0.165	0.147	0.127	0.106	0.085	0.066	0.048	0.033	0.020	0.011	0.005	0.001	0.000	-0.000	-0.000
	y_3	0.201	0.198	0.191	0.180	0.166	0.149	0.129	0.109	0.089	0.070	0.052	0.037	0.024	0.015	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000
y	y_1	-0.477	-0.472	-0.456	-0.430	-0.396	-0.355	-0.310	-0.262	-0.215	-0.169	-0.127	-0.090	-0.060	-0.036	-0.019	-0.008	-0.002	-0.000	0.000
	y_2	0.239	0.236	0.228	0.215	0.198	0.178	0.155	0.131	0.107	0.084	0.063	0.045	0.030	0.018	0.010	0.004	0.001	0.000	0.000
	y_3	0.239	0.236	0.228	0.215	0.198	0.178	0.155	0.131	0.107	0.084	0.063	0.045	0.030	0.018	0.010	0.004	0.001	0.000	0.000

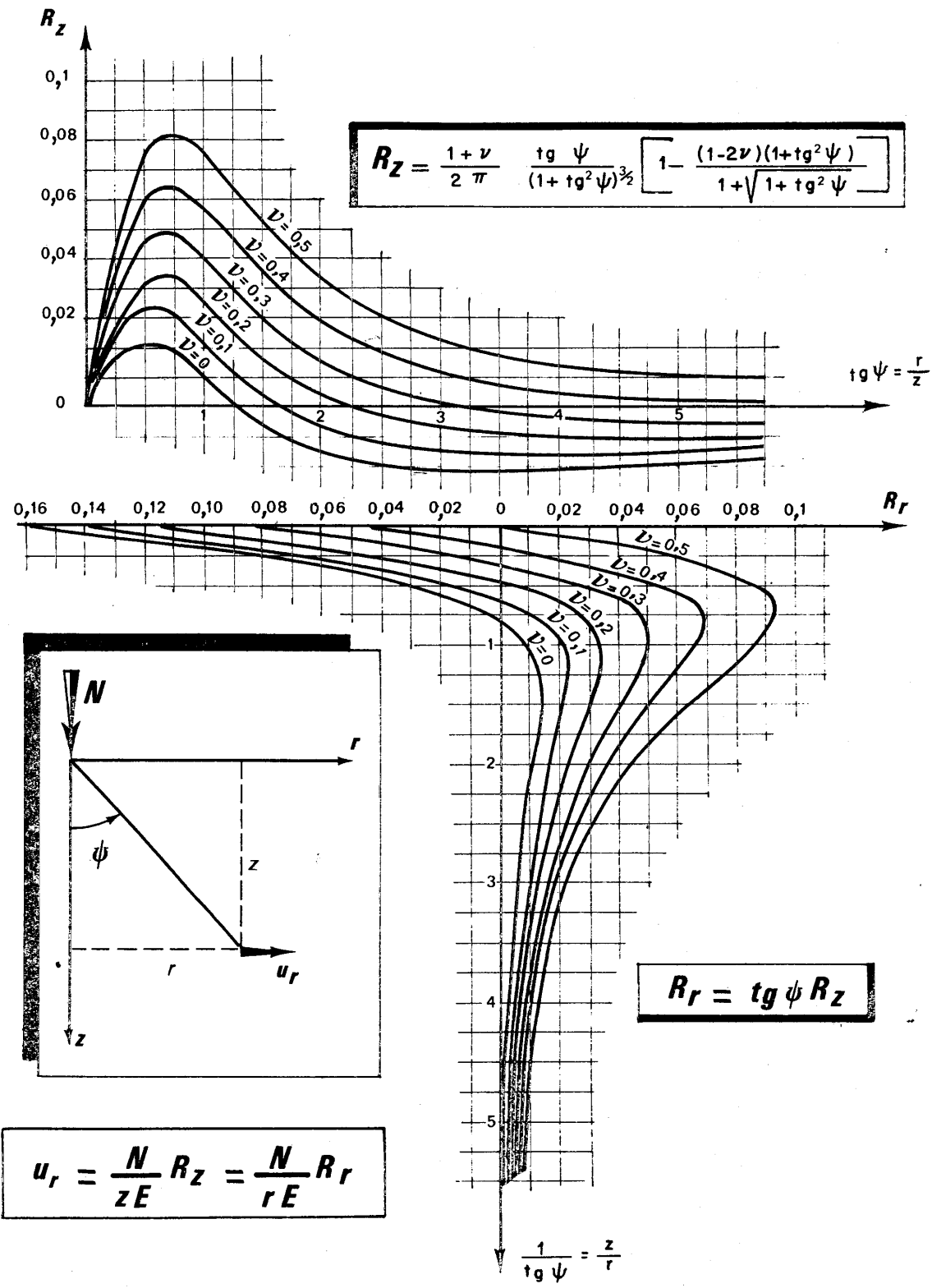
2-1

R_r

ψ	V = 0	V = 0.1	V = 0.2	V = 0.3	V = 0.4	V = 0.5
0	0	0	0	0	0	0
5	0.000599	0.000792	0.001009	0.00125	0.001517	0.001807
10	0.00231	0.00307	0.00393	0.00489	0.005940	0.007089
15	0.00488	0.00656	0.00845	0.01057	0.01290	0.01545
20	0.00790	0.01080	0.01408	0.01775	0.02181	0.02624
25	0.01085	0.01522	0.02018	0.02574	0.03189	0.03864
30	0.01314	0.01914	0.02600	0.03371	0.04227	0.05169
35	0.01411	0.02185	0.03075	0.04079	0.05199	0.06434
40	0.01314	0.02264	0.03364	0.04612	0.06010	0.07556
45	0.00965	0.02088	0.03396	0.04891	0.06573	0.08440
50	0.00318	0.01601	0.03111	0.04848	0.06813	0.09005
55	-0.00661	0.00766	0.02464	0.04434	0.06675	0.09188
60	-0.01989	-0.00438	0.01432	0.03621	0.06127	0.08952
65	-0.03664	-0.02009	0.000135	0.02404	0.05162	0.08287
70	-0.05665	-0.03928	-0.01772	0.00803	0.03797	0.07210
75	-0.07953	-0.06153	-0.03881	-0.01138	0.02078	0.05765
80	-0.10471	-0.08625	-0.06253	-0.03354	0.00070	0.04021
85	-0.13152	-0.11271	-0.08809	-0.05765	-0.02141	0.02065
90	-0.15915	-0.14005	-0.11459	-0.08276	-0.04436	0

R_z

ψ	V = 0	V = 0.1	V = 0.2	V = 0.3	V = 0.4	V = 0.5
0	0	0	0	0	0	0
5	0.00684	0.00905	0.01153	0.01430	0.01733	0.02065
10	0.01309	0.01742	0.02229	0.02771	0.03369	0.04021
15	0.01819	0.02447	0.03155	0.03944	0.04814	0.05765
20	0.02170	0.02967	0.03869	0.04877	0.05991	0.07210
25	0.02327	0.03263	0.04327	0.05519	0.06839	0.08287
30	0.02275	0.03315	0.04503	0.05838	0.07322	0.08952
35	0.02015	0.03121	0.04391	0.05826	0.07425	0.09188
40	0.01566	0.02699	0.04009	0.05497	0.07162	0.09005
45	0.00965	0.02088	0.03396	0.04891	0.06573	0.08440
50	0.00267	0.01343	0.02610	0.04068	0.05717	0.07556
55	-0.00463	0.00536	0.01725	0.03105	0.04674	0.06434
60	-0.01149	-0.00253	0.00827	0.02090	0.03538	0.05169
65	-0.01709	-0.00937	0.00006	0.01121	0.02407	0.03864
70	-0.02062	-0.01430	-0.00645	0.00292	0.01382	0.02624
75	-0.02131	-0.01649	-0.01040	-0.00303	0.00557	0.01545
80	-0.01846	-0.01521	-0.01103	-0.00591	0.00012	0.00709
85	-0.01151	-0.00986	-0.00771	-0.00504	-0.00187	0.00181
90	0	0	0	0	0	0



2-1

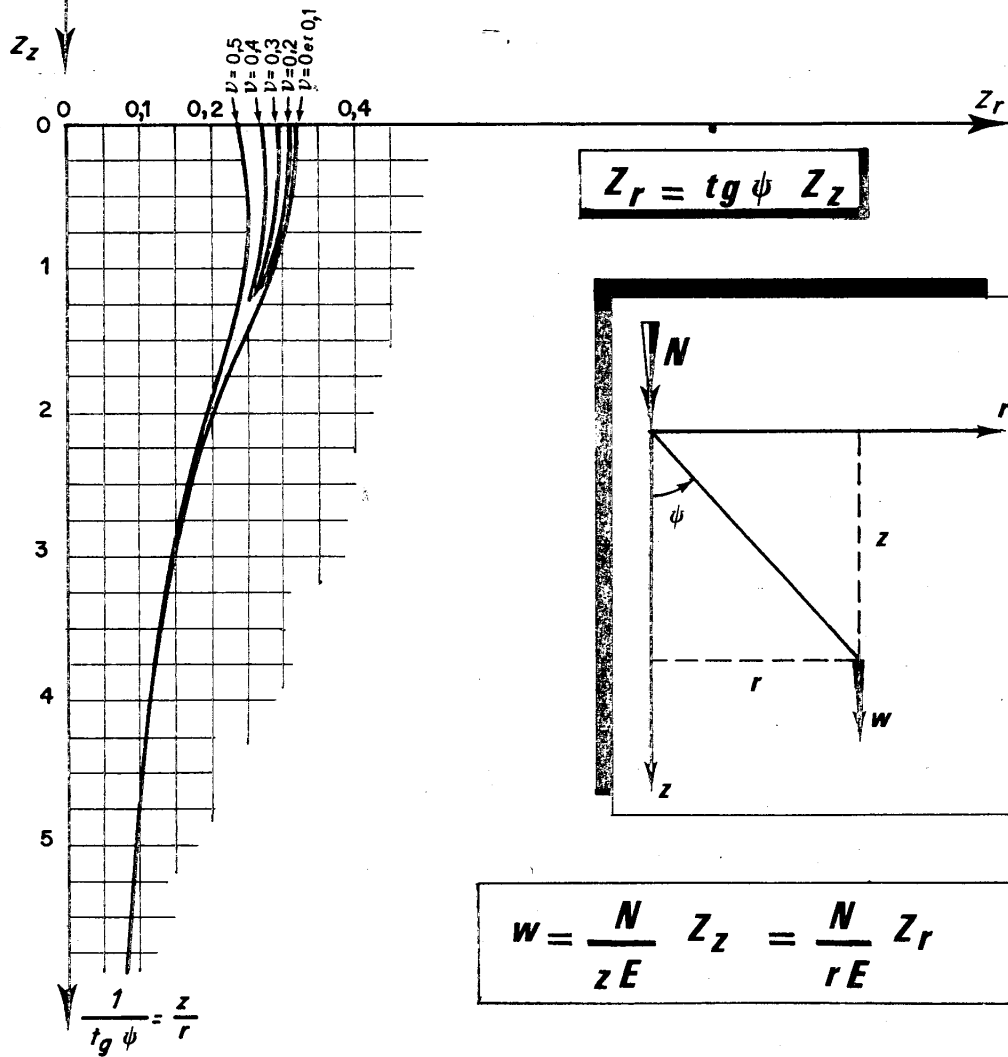
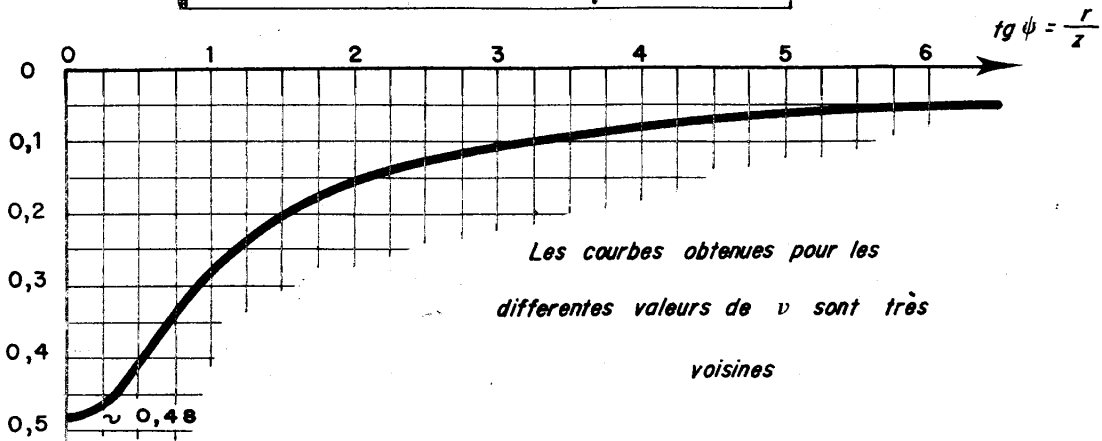
Z r

ψ	V = 0	V = 0.1	V = 0.2	V = 0.3	V = 0.4	V = 0.5
0	0	0	0	0	0	0
5	0.04151	0.04261	0.04315	0.04314	0.04258	0.04146
10	0.08208	0.08421	0.08523	0.08514	0.08396	0.08166
15	0.12082	0.12384	0.12521	0.12493	0.12301	0.11944
20	0.15693	0.16065	0.16219	0.16156	0.15874	0.15375
25	0.18977	0.19395	0.19544	0.19424	0.19035	0.18377
30	0.21884	0.22321	0.22441	0.22242	0.21725	0.20889
35	0.24383	0.24813	0.24878	0.24577	0.23912	0.22881
40	0.26464	0.26860	0.26846	0.26424	0.25592	0.24350
45	0.28135	0.28473	0.28360	0.27797	0.26784	0.25321
50	0.29421	0.29681	0.29454	0.28738	0.27535	0.25844
55	0.30364	0.30532	0.30178	0.29304	0.27907	0.25989
60	0.31012	0.31081	0.30599	0.29565	0.27980	0.25844
65	0.31425	0.31394	0.30786	0.29601	0.27840	0.25501
70	0.31661	0.31537	0.30814	0.29494	0.27575	0.25058
75	0.31776	0.31572	0.30752	0.29318	0.27269	0.24604
80	0.31820	0.31554	0.30661	0.29141	0.26993	0.24219
85	0.31830	0.31525	0.30586	0.29013	0.26805	0.23963
90	0.31831	0.31513	0.30558	0.28966	0.26738	0.23873

Z z

ψ	V = 0	V = 0.1	V = 0.2	V = 0.3	V = 0.4	V = 0.5
0	0.47746	0.49020	0.49656	0.49656	0.49020	0.47746
5	0.47444	0.48701	0.49323	0.49311	0.48665	0.47384
10	0.46548	0.47755	0.48335	0.48288	0.47613	0.46312
15	0.45090	0.46217	0.46729	0.46626	0.45908	0.44575
20	0.43118	0.44139	0.44562	0.44387	0.43614	0.42243
25	0.40697	0.41593	0.41912	0.41655	0.40820	0.39409
30	0.37904	0.38662	0.38869	0.38524	0.37628	0.36181
35	0.34823	0.35437	0.35529	0.35100	0.34150	0.32678
40	0.31538	0.32010	0.31994	0.31490	0.30499	0.29020
45	0.28135	0.28473	0.28360	0.27797	0.26784	0.25321
50	0.24687	0.24906	0.24714	0.24114	0.23105	0.21686
55	0.21261	0.21379	0.21131	0.20519	0.19541	0.18198
60	0.17905	0.17945	0.17666	0.17069	0.16154	0.14921
65	0.14654	0.14639	0.14356	0.13803	0.12982	0.11891
70	0.11524	0.11478	0.11215	0.10735	0.10036	0.09120
75	0.08514	0.08460	0.08240	0.07856	0.07307	0.06593
80	0.05611	0.05564	0.05406	0.05138	0.04760	0.04271
85	0.02785	0.02758	0.02676	0.02538	0.02345	0.02096
90	0	0	0	0	0	0

$$Z_z = \frac{1+\nu}{2\pi} \left[\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\psi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}} \right]$$



EXPRESSION DES COEFFICIENTS G ET H

$$G_0 = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$G_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{\xi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$G_2 = \frac{3}{2\pi} \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$G_3 = \frac{3}{2\pi} \frac{\xi^3}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$G_4 = \frac{3}{2\pi} \frac{\xi\eta}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$G_5 = \frac{3}{2\pi} \frac{\xi\eta^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$H_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{\eta}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$H_2 = \frac{3}{2\pi} \frac{\eta^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$H_5 = \frac{3}{2\pi} \frac{\xi^2 \eta}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$G'_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 + \eta^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2} (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})} + \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2) (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2} + \frac{1}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \right]$$

$$G'_3 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\xi}{(1 + \xi^2 + \eta^2) (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2} \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \xi^2 + \eta^2}} - \frac{2\eta^2}{1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} \right]$$

$$G'_4 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi\eta(1 + 2\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2} (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2}$$

$$G'_5 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2} (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2} \left(3 + 3\eta^2 + \frac{2\xi^2}{1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} \right)$$

$$H'_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 + \xi^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2} (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})} + \frac{\eta^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2) (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2} + \frac{1}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \right]$$

$$H'_3 = \frac{1}{2\pi} \frac{\eta}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2} (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2} \left[1 + \eta^2 - \frac{2\xi^2 \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}{1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} \right]$$

2-1

EXPRESSION DES COEFFICIENTS I ET J

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi^2 + \eta^2 - 2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi(\xi^2 + \eta^2 - 2)}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$I'_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

$$I'_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - 2\xi^2 + \eta^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$I'_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \eta^2 + (1 - \xi^2 + \eta^2) \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2} (1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2}$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi(1 - 2\xi^2 + \eta^2)}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$I'_3 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)(1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2} \left[\frac{2\xi^2 + 3\eta^2 + 3}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} - \frac{2\xi^2}{1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} \right]$$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi(1 + \xi^2 - 2\eta^2)}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$I'_5 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)(1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2} \left[\frac{1 + \xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} - \frac{2\eta^2}{1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} \right]$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - 2\eta^2 + \xi^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{5/2}}$$

$$J'_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \xi^2 + (1 + \xi^2 - \eta^2)\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}(1 + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2})^2}$$

EXPRESSION DES COEFFICIENTS POUR LE CALCUL DES CONTRAINTES PRINCIPALES

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 \\ Z_3 \end{array} \right\} = \frac{\cos^2 \psi}{4\pi} \left[3 \cos \psi - \frac{1 - 2\nu}{1 + \cos \psi} + \sqrt{\left(3 \cos \psi - \frac{1 - 2\nu}{1 + \cos \psi} \right)^2 + 12(1 - 2\nu) \frac{\cos^3 \psi}{1 + \cos \psi}} \right]$$

$$Z_2 = -\frac{1 - 2\nu}{2} \frac{\cos^2 \psi (\cos \psi - \sin^2 \psi)}{1 + \cos \psi}$$

EXPRESSION DES COEFFICIENTS POUR LE CALCUL DES DEFORMATIONS PRINCIPALES

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 \\ Y_3 \end{array} \right\} = \frac{1 + \nu}{4 \pi} \left[(3 - 4 \nu) \cos^3 \psi - \frac{(1 - 2 \nu) \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} + \right. \\ \left. + \cos^2 \psi \sqrt{\left(3 \cos \psi - \frac{1 - 2 \nu}{1 + \cos \psi}\right)^2 + \frac{12(1 - 2 \nu) \cos^3 \psi}{1 + \cos \psi}} \right]$$

$$Y_2 = \frac{1 + \nu}{2 \pi} \cos^2 \psi \left(\cos \psi - \frac{1 - 2 \nu}{1 + \cos \psi} \right).$$

2-1

EXPRESSION DES DEFORMATIONS DANS DIVERS AXES DE COORDONNEES

- Coordonnées cartésiennes :

$$\epsilon_x = \frac{1 + \nu}{2 \pi E \rho^3} \left\{ \left(1 - 3 \frac{x^2}{\rho^2}\right) (zN + xT) - \right. \\ \left. - \frac{1 - 2 \nu}{(z + \rho)^2} \left[N \left((z + \rho) (y^2 + z^2) - \rho x^2 \right) + xT \left(3 \rho^2 - x^2 - \frac{2 \rho x^2}{z + \rho} \right) \right] \right\}$$

$$\epsilon_y = \frac{1 + \nu}{2 \pi E \rho^3} \left\{ \left(1 - 3 \frac{y^2}{\rho^2}\right) (zN + xT) - \right. \\ \left. - \frac{1 - 2 \nu}{(z + \rho)^2} \left[N \left((z + \rho) (x^2 + z^2) - \rho y^2 \right) + xT \left(\rho^2 - y^2 - \frac{2 y^2 \rho}{z + \rho} \right) \right] \right\}$$

$$\epsilon_z = \frac{1 + \nu}{2 \pi E \rho^3} \left(2 \nu - \frac{3 z^2}{\rho^2} \right) (zN + xT)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{1 + \nu}{2 \pi E \rho^3} \left\{ \frac{3 xy}{\rho^2} (zN + xT) - \right. \\ \left. - \frac{1 - 2 \nu}{(z + \rho)^2} \left[xy(z + 2 \rho) N + y \left(x^2 - \rho^2 + \frac{2 \rho x^2}{z + \rho} \right) T \right] \right\}$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{3(1 + \nu) yz}{2 \pi E \rho^5} (zN + xT)$$

$$\gamma_{zx} = -\frac{3(1 + \nu) zx}{2 \pi E \rho^5} (zN + xT)$$

- Coordonnées cylindriques :

$$\epsilon_r = \frac{1 + \nu}{2 \pi E \rho^3} \left\{ \left(1 - 3 \frac{r^2}{\rho^2} \right) (zN + rT \cos \theta) - \right. \\ \left. - \frac{1 - 2 \nu}{(z + \rho)^2} \left[N(z^3 + \rho(z^2 - r^2)) + Trz(z + 2 \rho) \cos \theta \right] \right\}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{2 \pi E} \left[\frac{1}{\rho} (zN + rT \cos \theta) - \frac{1 - 2 \nu}{\rho(z + \rho)} \left(N + \frac{rT \cos \theta}{z + \rho} \right) \right]$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{r \sin \theta}{\rho(z+\rho)^2} T$$

$$\gamma_{\theta z} = 0$$

$$\gamma_{zr} = -\frac{1+\nu}{2\pi E \rho^5} 3zr(zN + rT \cos \theta).$$

- Coordonnées sphériques :

$$\epsilon_{\psi} = \frac{1+\nu}{2\pi E \rho^2} \left\{ (N \cos \psi + T \cos \theta \sin \psi) - \right. \\ \left. - \frac{1-2\nu}{1+\cos \psi} \left[N \cos \psi + T \left(1 + \frac{\cos \psi}{1+\cos \psi} \right) \cos \theta \sin \psi \right] \right\}$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1+\nu}{2\pi E \rho^2} \left\{ (N \cos \psi + T \cos \theta \sin \psi) - \right. \\ \left. - \frac{(1-2\nu)}{1+\cos \psi} \left[N + \frac{T \cos \theta \sin \psi}{(1+\cos \psi)^2} \right] \right\}$$

$$\epsilon_{\rho} = -\frac{1+\nu}{2\pi E \rho^2} \left\{ 2(N \cos \psi + T \cos \theta \sin \psi) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left[N(2 \cos \psi - 1) + T \cos \theta \sin \psi \frac{\cos \psi}{1+\cos \psi} \right] \right\}$$

$$\gamma_{\psi\theta} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E \rho^2} \frac{1-\cos \psi}{(1+\cos \psi) \sin \psi} T \sin \theta \cos \psi.$$

BIBLIOGRAPHIE

a) Calcul des contraintes

Les expressions des contraintes sont dues à Boussinesq [1] pour la composante normale de la force et à Cerruti [2] pour la composante tangentielle. La formule de σ_z due à une force normale se trouve dans la plupart des livres de Mécanique des Sols, et ses valeurs numériques ont été calculées par Fadum [3]. De plus Florin [4] a donné quelques valeurs numériques de σ_x et σ_z . Nous avons publié par ailleurs une étude détaillée de ce problème avec notamment une discussion sur le signe des contraintes et sur les approximations commises lorsque l'on remplace une charge répartie par une force concentrée [5].

REFERENCES

- [1] H. BOUSSINESQ, "Application des Potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des solides Elastiques", Gauthier Villars (Paris 1885), p. 79, 104, 107, 188.
- [2] V. CERRUTI, "Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi", "Reale Accademica dei Lincei, 13" (Roma, 1882).
- [3] R.E. FADUM, "Influence values for estimating the stresses in elastic foundations", "Proc. 2^e I.C.S.M.F.E., 3", 1g 9 (Rotterdam, 1948), 77-84.
- [4] V.A. FLORIN, "Osnori Mecaniki Gruntov", Tom I (Moscou, 1959), p. 122.
- [5] J.P. GIROUD, "Contraintes provoquées par une force concentrée exercée à la surface du sol", "Le Génie Civil, 145, 12 (Décembre 1968), 682-688.

b) Calcul des déplacements

Les expressions des déplacements sont dues à Boussinesq [1] pour la composante normale de la force et à Cerruti [3] pour la composante tangentielle.

Nous avons publié, par ailleurs, une étude détaillée de ce problème avec, notamment, une discussion sur les approximations et sur le signe des déplacements [4]. Les tableaux et graphiques donnés ici sont originaux ; nous avons contrôlé la bonne concordance de ces valeurs avec les quelques résultats cités dans la littérature. La formule du tassement dû à une force normale se trouve dans un grand nombre de livres de Mécanique des Sols. On trouve quelques précisions intéressantes dans [2] et [5].

REFERENCES

- [1] J. BOUSSINESQ, "Application des potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques", Gauthier-Villars (Paris 1885), p. 100.
- [2] A. CAQUOT et J. KERISEL, "Traité de Mécanique des Sols", Gauthier-Villars, 3^e ed. (1956), p. 137.
- [3] V. CERRUTI, Ricerche intorno all equilibrio dei corpi elastici isotropi, "Reale Accademia dei Lincei, 13", (Roma 1882).
- [4] J.P. GIROUD, "Déplacements provoqués par une force concentrée exercée à la surface du sol", Le Génie Civil, 146, 12 (Décembre 1969) 631-637.
- [5] A.I. LUR'E, "Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity", Interscience Pub. (New York, 1964), p. 90.

c) Calcul des déformations

Nous avons dérivé les expressions des déformations de celles du déplacement et nous avons publié une étude détaillée de ce problème avec notamment une discussion du signe des déformations [1]. Nous n'avons relevé dans la littérature qu'un article traitant des déformations et ne donnant que l'expression de ϵ_z [2].

- [1] J.P. GIROUD, "Déformations provoquées par une force concentrée exercée à la surface du sol", Le Génie Civil, 148, 2 (Février 1971), 87-94.
- [2] H. GRAY, "Stress Distribution in Elastic Solids", Proc. 1st I.C.S.M.F.E., 2, E.10 (Cambridge, Mass., 1936) 157-168.

FORCE NORMALE CONCENTRÉE PONCTUELLE

(semelle sous poteau)
sur une couche de sol homogène
d'épaisseur finie

2-2

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul du déplacement de la surface.
- Calcul des contraintes.
- Tables et graphiques.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol est homogène dans une couche d'épaisseur finie H reposant sur un substratum rigide auquel il adhère parfaitement (Fig. 1).

DEFINITION DE LA CHARGE

La force N est une compression normale appliquée au point 0 de la surface du sol (Fig. 1).

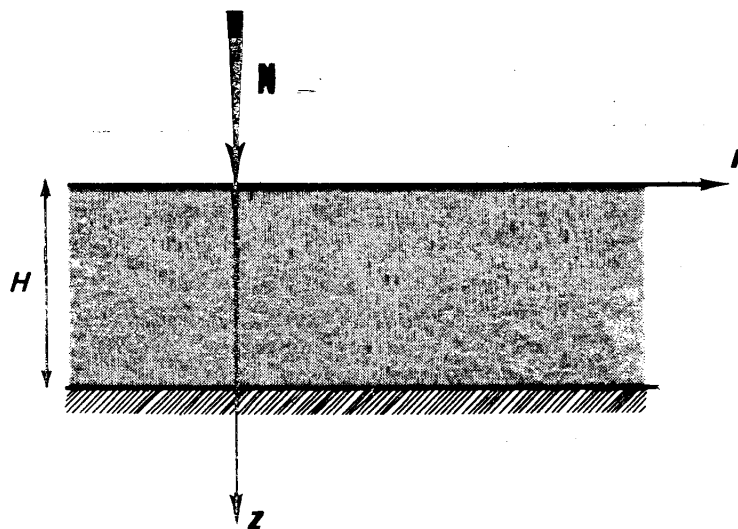


FIG. 1. — Définition du sol et de la charge.

CALCUL DU DEPLACEMENT DE LA SURFACE

Le déplacement d'un point de la surface du sol est donné par les formules suivantes :

$$(1) \quad u_r = \frac{N}{2\pi H E} R_H$$

$$(2) \quad w = \frac{N}{2\pi H E} Z_H$$

avec :

- u_r : composante horizontale du déplacement,
 w : composante verticale du déplacement (tassement),
 N : force normale exercée sur le sol,
 H : épaisseur de la couche de sol,
 E : module d'Young du sol,
 R_H, Z_H : coefficients sans dimensions dont les valeurs numériques sont
 données dans des tables et graphiques en fonction de ν et r/H ,
 ν : coefficient de Poisson du sol,
 r : distance entre le point d'application de N et le point où l'on
 calcule le déplacement.

Exemple 1 :

Soit une couche d'argile de 10 m (33 ft) d'épaisseur et de module d'Young 19 bars (40 000 lb/sq.ft) reposant sur un substratum rocheux horizontal. Évaluer le tassement à 9 m (30 ft) d'une charge verticale de 420 tonnes (920 000 lb) pour $\nu = 0,5$ (tassement instantané de l'argile saturée) et $\nu = 0,2$ (tassement à long terme).

Pour $r/H = 0,9$ on lit dans la table :

$$Z_H = 0,286 \quad \text{pour } \nu = 0,2 ,$$

$$Z_H = -0,160 \quad \text{pour } \nu = 0,5 .$$

D'où, pour $\nu = 0,2$:

$$w = \frac{420 \times 9\,810}{19 \times 10^5 \times 2 \pi \times 10} \times 0,286 = 0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm} ,$$

$$w = \frac{920\,000}{40\,000 \times 2 \pi \times 33} \times 0,286 = 0,03 \text{ ft} ,$$

et, pour $\nu = 0,5$:

$$w = - \frac{420 \times 9\,810}{19 \times 10^5 \times 2 \pi \times 10} \times 0,160 = -0,005 \text{ m} = -0,5 \text{ cm} ,$$

$$w = - \frac{920\,000}{40\,000 \times 2 \pi \times 33} \times 0,160 = -0,015 \text{ ft} .$$

Le signe moins indique un soulèvement du sol.

CALCUL DES CONTRAINTES

Les contraintes en tout point de la couche de sol sont données par les formules suivantes :

$$(3) \quad \sigma_z = \frac{N}{2 \pi H^2} G_{H0}$$

$$(4) \quad \tau_{zr} = \frac{N}{2 \pi H^2} G_{H1}$$

$$(5) \quad \sigma_r = \frac{N}{2 \pi H^2} G_{H2}$$

$$(6) \quad \sigma_\theta = \frac{N}{2 \pi H^2} H_{H2}$$

avec :

N : force normale exercée sur le sol,

H : épaisseur de la couche de sol,

G_{H0} , G_{H1} , G_{H2} , H_{H2} : coefficients sans dimensions donnés dans des tables en fonction de ν , r/H et z/H ,

ν : coefficient de Poisson du sol,

r , z : coordonnées cylindriques du point où l'on calcule les contraintes (Fig. 1).

Exemple 2 :

Reprenons l'exemple 1 et calculons la contrainte σ_z à 6 m (20 ft) de profondeur sous le point dont on a calculé le tassement.

Pour $r/H = 0,9$ et $z/H = 0,6$, on lit dans les tables :

$$G_{H0} = 0,480 \quad \text{pour } \nu = 0,2 ,$$

$$G_{H0} = 0,415 \quad \text{pour } \nu = 0,5 .$$

D'où, en appliquant la formule (3) :

— pour $\nu = 0,2$:

$$\sigma_z = \frac{420 \times 9\,810}{2 \pi \times 100} \times 0,480 = 3\,140 \text{ N/m}^2 = 0,031 \text{ bar} ,$$

$$\sigma_z = \frac{920\,000}{2 \pi \times (33)^2} \times 0,480 = 64,5 \text{ lb/sq.ft} ,$$

et, pour $\nu = 0,5$:

$$\sigma_z = \frac{420 \times 9\,810}{2 \pi \times 100} \times 0,415 = 2\,720 \text{ newtons/m}^2 = 0,027 \text{ bar} ,$$

$$\sigma_z = \frac{920\,000}{2 \pi \times (33)^2} \times 0,415 = 56 \text{ lb/sq.ft} .$$

2-2

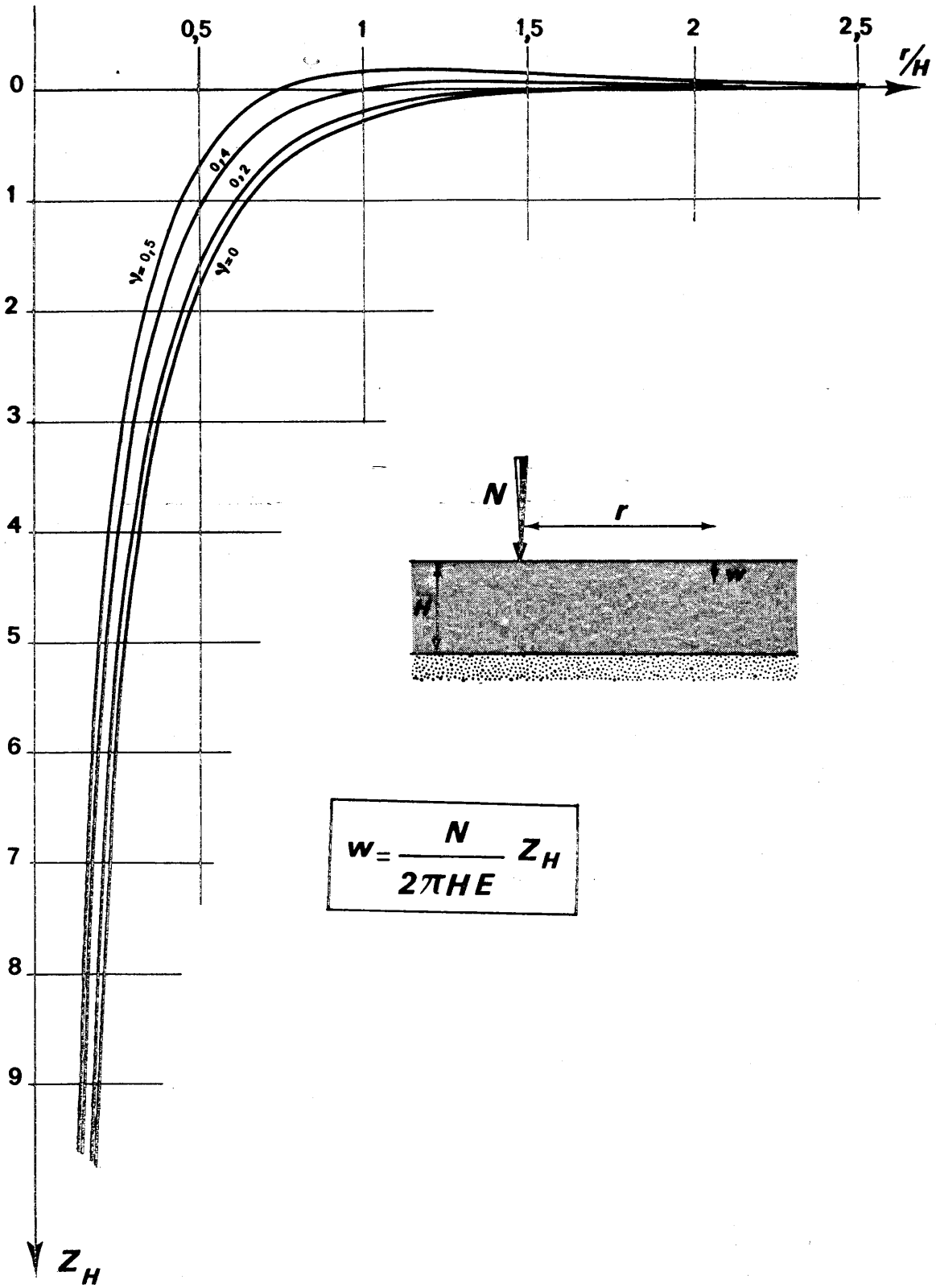
TABLES ET GRAPHIQUES

— Calcul des déplacements

- Graphique et table de Z_H : pp. 138 et 139.
- Table de R_H : p. 140.

— Calcul des contraintes

Tables de G_{H0} , G_{H1} , G_{H2} , H_{H2} : pp. 141 à 148.



2

VALEURS DE Z_H

r/H	Coefficient de Poisson du Sol ν			
	0	0,2	0,4	0,5
0,05	37,580	35,921	31,052	27,351
0,1	17,586	16,728	14,260	12,360
0,15	10,945	10,347	8,690	7,396
0,2	7,624	7,162	5,897	4,914
0,25	5,62	5,12	4,100	3,39
0,3	4,327	4,016	3,154	2,480
0,35	3,45	3,10	2,35	1,79
0,4	2,72	2,478	1,827	1,320
0,45	2,210	1,97	1,39	0,99
0,5	1,792	1,599	1,092	0,699
0,55	1,45	1,30	0,82	0,480
0,6	1,212	1,048	0,635	0,290
0,65	0,99	0,87	0,47	0,150
0,70	0,823	0,690	0,352	0,051
0,75	0,672	0,565	0,245	-0,022
0,8	0,560	0,450	0,168	-0,079
0,85	0,452	0,365	0,105	-0,130
0,9	0,373	0,286	0,053	-0,160
0,95	0,300	0,230	0,020	-0,179
1	0,250	0,182	-0,011	-0,183
1,05	0,202	0,135	-0,038	-0,190
1,10	0,165	0,110	-0,055	-0,198
1,15	0,135	0,072	-0,070	-0,199
1,2	0,105	0,052	-0,080	-0,197
1,25	0,080	0,031	-0,085	-0,194
1,3	0,060	0,020	-0,085	-0,190
1,35	0,045	0,010	-0,084	-0,182
1,4	0,032	0,001	-0,082	-0,175
1,45	0,022	-0,001	-0,080	-0,165
1,5	0,013	-0,002	-0,077	-0,156
1,55	0,005	-0,003	-0,075	-0,148
1,6	0,001	-0,004	-0,070	-0,140
1,65	0,000	-0,005	-0,063	-0,133
1,7	-0,004	-0,006	-0,055	-0,127
1,75	-0,007	-0,007	-0,048	-0,123
1,8	-0,009	-0,008	-0,046	-0,112
1,85	-0,010	-0,009	-0,042	-0,105
1,9	-0,011	-0,010	-0,041	-0,098
1,95	-0,012	-0,011	-0,040	-0,091
2	-0,012	-0,012	-0,039	-0,083
2,05	-0,011	-0,013	-0,036	-0,078
2,1	-0,010	-0,014	-0,032	-0,075
2,15	-0,009	-0,015	-0,030	-0,069
2,20	-0,007	-0,016	-0,029	-0,065
2,25	-0,006	-0,016	-0,028	-0,055
2,3	-0,006	-0,016	-0,028	-0,050
2,35	-0,005	-0,016	-0,027	-0,049
2,4	-0,005	-0,017	-0,027	-0,045
2,45	-0,005	-0,017	-0,026	-0,040
2,5	-0,004	-0,017	-0,025	-0,036
2,55	-0,004	-0,016	-0,020	-0,034
2,6	-0,004	-0,014	-0,018	-0,033
2,65	-0,004	-0,012	-0,014	-0,032
2,7	-0,003	-0,011	-0,012	-0,031
2,75	-0,003	-0,010	-0,010	-0,030
2,8	-0,003	-0,007	-0,010	-0,029
2,85	-0,003	-0,003	-0,009	-0,027
2,9	-0,001	-0,001	-0,009	-0,026
2,95		0,000	-0,008	-0,025
3		0,001	-0,008	-0,025

r/H	Coefficient de Poisson du Sol ν			
	0	0,2	0,4	0,5
3,05	-0,003	0,001	-0,008	-0,023
3,1			-0,007	-0,022
3,15			-0,007	-0,021
3,2			-0,007	-0,021
3,25	-0,003	0,001	-0,006	-0,020
3,3			-0,006	-0,020
3,35			-0,006	-0,019
3,4			-0,005	-0,019
3,45	-0,003	0,001	-0,005	-0,018
3,5		0,000	-0,004	-0,018
3,55		0,000	-0,004	-0,018
3,6		0,000	-0,004	-0,017
3,65	-0,003	0,000	-0,004	-0,016
3,7	-0,002		-0,004	-0,015
3,75	-0,002		-0,003	-0,015
3,8	-0,002		-0,003	-0,014
3,85	-0,002	0,000	-0,003	-0,014
3,9	-0,002		-0,003	-0,013
3,95	-0,001		-0,003	-0,013
4	-0,001		-0,003	-0,012
4,05	-0,001	0,000	-0,003	-0,012
4,1				
4,15				
4,2				
4,25	-0,001	0,000	-0,003	-0,011
4,3				
4,35				
4,4				
4,45	-0,001	0,000	-0,003	-0,010
4,5				
4,55				
4,6				
4,65	-0,001	0,000	-0,003	-0,010
4,7			-0,002	-0,009
4,75			-0,002	-0,009
4,8			-0,002	-0,009
4,85	-0,001	0,000	-0,002	-0,009
4,9				-0,009
4,95				-0,008
5				-0,007
5,05	-0,001	0,000	-0,002	-0,007
5,1				-0,006
5,15				-0,006
5,2				-0,005
5,25	-0,001	0,000	-0,002	-0,005
5,3				-0,004
5,35				-0,004
5,4				-0,003
5,45	-0,001	0,000	-0,002	-0,003
5,5	0,000		-0,001	-0,002
6			-0,001	-0,002
7			-0,001	-0,001
8	0,000	0,000	0,000	0,000
9				
10				

(d'après TAYLOR)

2-2

$$R_H$$

$$V$$

r/H	0	0.2	0.4	0.5
0.05	-19.959	-14.362	-5.559	+0.041
0.1	-9.948	-7.124	-2.723	+0.078
0.2	-4.896	-3.455	-1.250	+0.156
0.3	-3.183	-2.184	-0.716	+0.225
0.4	-2.308	-1.523	-0.426	+0.288
0.5	-1.773	-1.064	-0.232	+0.326
0.6	-1.277	-0.824	-0.102	+0.376
0.7	-1.000	-0.620	-0.008	+0.405
0.8	-0.789	-0.465	+0.063	+0.420
0.9	-0.627	-0.349	+0.011	+0.421
1.0	-0.499	-0.259	+0.141	+0.417
1.25	-0.292	-0.150	+0.175	+0.380
1.5	-0.167	-0.048	+0.163	+0.315
1.75	-0.097	-0.012	+0.134	+0.250
2.0	-0.060	-0.002	+0.109	+0.195
2.5	-0.027	-0.003	+0.070	+0.118
3.0	-0.010	+0.002	+0.038	+0.072
3.5	-0.003	+0.008	+0.022	+0.046
4.0	-0.002	+0.000	+0.014	+0.029
6.0	-0.000	+0.000	+0.002	+0.002
10.0	-0.000	+0.000	+0.000	+0.000

(d'après TAYLOR)

V=0		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	300.0	53.07	5.400	0.980	0.280	0.112	0.057	0.035	0.023	0.015	0.010	-0.001	-0.007	-0.010	-0.010	-0.010	-0.006	-0.001	0.001	0.002	0.001	0.000	0.000
0.2	75.11	43.04	13.36	4.028	1.419	0.594	0.288	0.155	0.089	0.052	0.029	0.001	-0.010	-0.014	-0.013	-0.007	-0.007	-0.002	0.001	0.002	0.001	0.000	0.000
0.3	33.55	25.82	13.49	6.067	2.741	1.323	0.690	0.384	0.223	0.131	0.075	0.010	-0.013	-0.018	-0.017	-0.009	-0.003	-0.003	0.001	0.002	0.001	0.000	0.000
0.4	19.10	16.45	11.05	6.426	3.554	1.977	1.132	0.669	0.404	0.245	0.146	0.028	-0.012	-0.022	-0.020	-0.011	-0.004	-0.004	0.000	0.002	0.001	0.000	0.000
0.5	12.50	11.37	8.738	5.970	3.827	2.397	1.499	0.944	0.597	0.376	0.233	0.056	-0.006	-0.023	-0.023	-0.013	-0.005	-0.005	-0.000	0.001	0.001	0.000	0.000
0.6	9.017	8.448	7.022	5.316	3.782	2.595	1.747	1.165	0.770	0.504	0.324	0.090	0.006	-0.021	-0.025	-0.015	-0.006	-0.006	-0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
0.7	7.005	6.680	5.826	4.713	3.601	2.642	1.886	1.319	0.910	0.615	0.408	0.127	0.020	-0.018	-0.025	-0.016	-0.007	-0.007	-0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
0.8	5.779	5.571	5.005	4.225	3.386	2.606	1.943	1.412	1.006	0.702	0.481	0.164	0.036	-0.011	-0.023	-0.018	-0.008	-0.008	-0.002	0.000	0.001	0.000	0.000
0.9	4.993	4.844	4.431	3.842	3.178	2.528	1.947	1.460	1.070	0.768	0.541	0.201	0.055	-0.003	-0.020	-0.018	-0.009	-0.009	-0.003	0.000	0.001	0.000	0.000
1	4.422	4.308	3.989	3.523	2.982	2.432	1.923	1.481	1.114	0.821	0.593	0.238	0.074	0.007	-0.017	-0.019	-0.010	-0.010	-0.004	-0.000	0.001	0.000	0.000



V=0.2		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	300.0	53.08	5.415	0.994	0.293	0.124	0.067	0.041	0.026	0.016	0.008	-0.006	-0.012	-0.012	-0.010	-0.004	0.001	0.001	0.002	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.2	75.13	43.06	13.38	4.050	1.437	0.609	0.298	0.161	0.091	0.051	0.025	-0.007	-0.017	-0.017	-0.013	-0.005	0.000	0.000	0.002	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.3	33.59	25.86	13.52	6.098	2.766	1.341	0.701	0.389	0.222	0.126	0.068	-0.001	-0.021	-0.022	-0.017	-0.006	-0.000	-0.000	0.002	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.4	19.15	16.51	11.10	6.466	3.585	1.998	1.143	0.671	0.399	0.235	0.133	0.013	-0.022	-0.026	-0.020	-0.007	-0.001	-0.001	0.002	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.5	12.57	11.44	8.797	6.018	3.862	2.418	1.507	0.941	0.586	0.360	0.214	0.036	-0.018	-0.028	-0.023	-0.009	-0.001	-0.001	0.002	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.6	9.098	8.525	7.089	5.369	3.817	2.613	1.750	1.155	0.752	0.480	0.297	0.066	-0.010	-0.026	-0.024	-0.009	-0.001	-0.001	0.002	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.7	7.089	6.761	5.894	4.763	3.630	2.651	1.878	1.298	0.879	0.581	0.374	0.099	0.004	-0.022	-0.022	-0.010	-0.001	-0.001	0.002	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.8	5.853	5.640	5.060	4.259	3.399	2.597	1.918	1.376	0.964	0.659	0.439	0.135	0.021	-0.014	-0.019	-0.009	-0.002	-0.002	0.001	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.9	5.028	4.814	4.448	3.840	3.157	2.490	1.898	1.405	1.015	0.716	0.494	0.172	0.042	-0.003	-0.014	-0.009	-0.002	-0.002	0.001	0.002	0.000	-0.000	-0.000
1	4.358	4.243	3.919	3.447	2.902	2.352	1.844	1.407	1.048	0.764	0.545	0.213	0.067	0.010	-0.008	-0.008	-0.002	-0.002	0.001	0.002	0.000	-0.000	-0.000

(d'après POULOS)

V=0.4		Γ/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	300.0	53.07	5.404	0.981	0.279	0.108	0.051	0.027	0.014	0.007	0.002	-0.003	-0.004	-0.002	-0.001	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	-0.000	-0.000	-0.000
0.2	75.15	43.08	13.40	4.058	1.440	0.605	0.290	0.150	0.079	0.039	0.015	-0.010	-0.013	-0.009	-0.005	0.001	0.003	0.002	0.001	0.001	-0.000	-0.000	-0.000
0.3	33.64	25.92	13.57	6.135	2.791	1.353	0.702	0.381	0.209	0.109	0.050	-0.012	-0.023	-0.017	-0.009	0.001	0.003	0.002	0.001	0.001	-0.000	-0.000	-0.000
0.4	19.25	16.60	11.18	6.536	3.634	2.026	1.153	0.666	0.382	0.212	0.107	-0.007	-0.031	-0.025	-0.014	0.000	0.003	0.003	0.001	0.001	-0.000	-0.000	-0.000
0.5	12.73	11.58	8.926	6.121	3.936	2.461	1.523	0.935	0.563	0.327	0.177	0.007	-0.034	-0.030	-0.017	-0.000	0.004	0.003	0.002	0.002	-0.000	-0.000	-0.000
0.6	9.297	8.717	7.257	5.502	3.910	2.665	1.767	1.143	0.720	0.436	0.248	0.025	-0.031	-0.031	-0.018	0.001	0.005	0.004	0.002	0.002	0.000	-0.000	-0.000
0.7	7.330	6.990	6.093	4.917	3.734	2.705	1.888	1.276	0.833	0.523	0.312	0.050	-0.022	-0.028	-0.017	0.001	0.005	0.004	0.003	0.003	0.000	-0.000	-0.000
0.8	6.113	5.887	5.270	4.416	3.496	2.639	1.912	1.336	0.902	0.587	0.365	0.080	-0.007	-0.020	-0.013	0.003	0.006	0.005	0.003	0.003	0.000	-0.000	-0.000
0.9	5.259	5.091	4.626	3.963	3.221	2.500	1.865	1.343	0.936	0.632	0.412	0.116	0.016	-0.007	-0.006	0.005	0.007	0.006	0.003	0.003	0.000	-0.000	-0.000
1	4.454	4.329	3.980	3.472	2.890	2.306	1.775	1.323	0.959	0.671	0.466	0.163	0.045	0.009	0.003	0.007	0.008	0.006	0.004	0.004	0.000	-0.000	-0.000



V=0.5		Γ/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	300.0	53.17	5.438	0.947	0.205	0.032	-0.001	0.010	0.029	0.042	0.046	0.029	0.003	-0.013	-0.018	0.000	-0.003	0.000	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000
0.2	75.26	43.17	13.44	4.053	1.403	0.561	0.257	0.139	0.089	0.064	0.047	0.014	-0.010	-0.021	-0.021	0.001	-0.003	0.001	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000
0.3	33.75	26.01	13.64	6.167	2.795	1.344	0.692	0.378	0.215	0.124	0.069	0.000	-0.025	-0.030	-0.026	0.001	-0.002	0.001	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.4	19.39	16.73	11.29	6.610	3.679	2.049	1.162	0.669	0.385	0.216	0.111	-0.007	-0.039	-0.039	-0.030	0.002	-0.001	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.5	12.91	11.76	9.080	6.241	4.019	2.512	1.549	0.943	0.561	0.319	0.166	-0.007	-0.048	-0.046	-0.033	0.003	0.001	0.003	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
0.6	9.542	8.951	7.463	5.666	4.027	2.738	1.803	1.152	0.710	0.415	0.223	0.000	-0.052	-0.048	-0.032	0.004	0.002	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
0.7	7.631	7.279	6.345	5.118	3.876	2.791	1.927	1.279	0.813	0.490	0.272	0.015	-0.048	-0.046	-0.030	0.005	-0.003	0.005	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
0.8	6.457	6.215	5.554	4.638	3.649	2.726	1.945	1.329	0.869	0.540	0.314	0.037	-0.034	-0.037	-0.024	0.006	0.005	0.006	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000
0.9	5.603	5.417	4.905	4.175	3.359	2.571	1.882	1.321	0.891	0.576	0.355	0.072	-0.011	-0.023	-0.016	0.007	0.007	0.007	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000
1	4.695	4.556	4.171	3.612	2.974	2.341	1.770	1.291	0.911	0.623	0.412	0.123	0.023	-0.003	-0.005	0.008	0.008	0.008	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000

(d'après POULOS)

V=0		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	53.01	10.69	2.781	0.928	0.347	0.124	0.027	-0.016	-0.035	-0.041	-0.032	-0.014	0.001	0.011	0.021	0.023	0.022	0.020	0.011	0.006	0.003	0.003
0.2	0	21.42	13.18	5.791	2.540	1.164	0.541	0.294	0.086	0.008	-0.031	-0.052	-0.036	-0.017	-0.002	0.015	0.019	0.019	0.018	0.010	0.005	0.003	0.003
0.3	0	8.480	8.750	5.735	3.262	1.785	0.962	0.505	0.249	0.104	0.023	-0.046	-0.044	-0.026	-0.010	0.009	0.015	0.017	0.016	0.009	0.005	0.003	0.003
0.4	0	3.957	5.230	4.416	3.080	1.966	1.199	0.706	0.398	0.209	0.095	-0.022	-0.038	-0.029	-0.015	0.004	0.012	0.013	0.014	0.008	0.004	0.002	0.002
0.5	0	2.093	3.154	3.116	2.517	1.820	1.232	0.797	0.495	0.294	0.163	0.011	-0.026	-0.017	-0.000	-0.008	0.008	0.011	0.011	0.007	0.004	0.002	0.002
0.6	0	1.204	1.957	2.138	1.916	1.527	1.128	0.791	0.532	0.345	0.214	0.045	-0.009	-0.020	-0.016	-0.003	0.005	0.008	0.009	0.006	0.003	0.002	0.002
0.7	0	0.731	1.246	1.456	1.408	1.211	0.963	0.725	0.523	0.365	0.246	0.075	0.009	-0.012	-0.014	-0.006	0.002	0.006	0.007	0.005	0.002	0.001	0.001
0.8	0	0.462	0.814	0.999	1.025	0.939	0.796	0.638	0.490	0.363	0.261	0.098	0.023	-0.006	-0.013	-0.008	-0.001	0.003	0.005	0.004	0.002	0.001	0.001
0.9	0	0.312	0.564	0.719	0.774	0.747	0.668	0.584	0.455	0.353	0.265	0.111	0.032	-0.002	-0.013	-0.011	-0.004	0.001	0.003	0.003	0.001	0.001	0.001
1	0	0.258	0.473	0.616	0.678	0.671	0.614	0.529	0.435	0.344	0.262	0.112	0.032	-0.004	-0.016	-0.014	-0.007	-0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000



V=0.2		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	53.00	10.68	2.765	0.909	0.326	0.102	0.005	-0.038	-0.056	-0.061	-0.049	-0.031	-0.017	-0.008	-0.000	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0	21.42	13.16	5.771	2.516	1.138	0.515	0.215	0.064	-0.012	-0.048	-0.063	-0.045	-0.026	-0.012	-0.000	0.002	0.002	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0	8.472	8.734	5.713	3.237	1.758	0.937	0.482	0.229	0.088	0.012	-0.049	-0.043	-0.027	-0.013	0.000	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.4	0	3.949	5.215	4.395	3.056	1.943	1.178	0.689	0.386	0.202	0.093	-0.015	-0.029	-0.020	-0.010	0.001	0.004	0.003	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
0.5	0	2.086	3.141	3.099	2.499	1.804	1.220	0.790	0.495	0.299	0.173	0.031	-0.005	-0.008	-0.004	0.003	0.004	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
0.6	0	1.199	1.949	2.129	1.909	1.524	1.131	0.801	0.550	0.368	0.242	0.079	0.024	0.007	0.004	0.004	0.005	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
0.7	0	0.731	1.248	1.462	1.420	1.231	0.992	0.761	0.566	0.413	0.297	0.127	0.054	0.024	0.012	0.006	0.005	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
0.8	0	0.472	0.835	1.032	1.071	0.996	0.864	0.713	0.570	0.446	0.343	0.170	0.082	0.039	0.019	0.007	0.005	0.004	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
0.9	0	0.342	0.623	0.804	0.880	0.868	0.798	0.697	0.586	0.460	0.384	0.206	0.103	0.050	0.024	0.007	0.005	0.004	0.004	0.001	0.001	0.000	0.000
1	0	0.330	0.607	0.797	0.889	0.896	0.839	0.746	0.636	0.526	0.424	0.229	0.114	0.054	0.025	0.007	0.004	0.004	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000

(d'après POULOS)

Z/H		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	52.99	10.65	2.727	0.862	0.273	0.045	-0.032	-0.094	-0.109	-0.110	-0.088	-0.060	-0.040	-0.028	-0.019	-0.016	-0.015	-0.013	-0.008	-0.008	-0.005	-0.003
0.2	0	21.40	13.12	5.717	2.450	1.065	0.439	0.139	-0.008	-0.078	-0.107	-0.102	-0.068	-0.040	-0.023	-0.012	-0.011	-0.011	-0.011	-0.007	-0.007	-0.005	-0.003
0.3	0	8.448	8.689	5.649	3.161	1.675	0.851	0.391	0.152	0.020	-0.047	-0.082	-0.059	-0.032	-0.016	-0.006	-0.008	-0.008	-0.009	-0.007	-0.007	-0.004	-0.003
0.4	0	3.923	5.165	4.327	2.976	1.856	1.091	0.607	0.313	0.140	0.042	-0.038	-0.034	-0.017	-0.005	0.001	-0.003	-0.006	-0.007	-0.006	-0.006	-0.004	-0.003
0.5	0	2.060	3.091	3.032	2.421	1.723	1.142	0.720	0.435	0.252	0.139	0.022	0.002	0.004	0.008	0.006	0.001	-0.003	-0.006	-0.006	-0.006	-0.004	-0.003
0.6	0	1.175	1.904	2.069	1.843	1.459	1.073	0.753	0.514	0.346	0.232	0.091	0.045	0.030	0.022	0.012	0.004	-0.001	-0.004	-0.005	-0.005	-0.004	-0.003
0.7	0	0.713	1.216	1.423	1.381	1.198	0.969	0.752	0.570	0.428	0.322	0.164	0.091	0.055	0.036	0.016	0.006	0.000	-0.003	-0.005	-0.005	-0.004	-0.003
0.8	0	0.470	0.834	1.037	1.085	1.024	0.904	0.765	0.631	0.512	0.412	0.235	0.135	0.079	0.048	0.019	0.007	0.001	-0.002	-0.005	-0.005	-0.004	-0.003
0.9	0	0.375	0.687	0.896	0.995	1.001	0.941	0.843	0.730	0.616	0.510	0.301	0.170	0.096	0.055	0.020	0.008	0.002	-0.001	-0.004	-0.004	-0.004	-0.003
1	0	0.436	0.806	1.064	1.195	1.214	1.149	1.033	0.893	0.750	0.616	0.352	0.191	0.102	0.056	0.020	0.009	0.003	-0.000	-0.004	-0.004	-0.003	-0.002



Z/H		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	53.01	10.67	2.739	0.851	0.241	0.007	-0.087	-0.118	-0.119	-0.105	-0.057	-0.020	0.001	0.009	0.011	0.008	0.005	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000
0.2	0	21.40	13.13	5.702	2.412	1.007	0.372	0.075	-0.059	-0.110	-0.119	-0.075	-0.024	0.006	0.020	0.021	0.015	0.009	0.006	0.001	0.001	0.000	0.000
0.3	0	8.440	8.668	5.610	3.101	1.599	0.769	0.322	0.089	-0.023	-0.068	-0.058	-0.012	0.019	0.032	0.030	0.021	0.013	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000
0.4	0	3.905	5.128	4.270	2.901	1.771	1.004	0.527	0.249	0.096	0.020	-0.013	-0.015	0.038	0.046	0.039	0.026	0.016	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000
0.5	0	2.035	3.043	2.965	2.340	1.636	1.057	0.646	0.378	0.216	0.124	0.053	0.056	0.063	0.062	0.046	0.030	0.019	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000
0.6	0	1.148	1.853	2.001	1.766	1.380	1.002	0.696	0.476	0.328	0.234	0.132	0.105	0.091	0.078	0.053	0.033	0.021	0.014	0.003	0.001	0.000	0.000
0.7	0	0.690	1.173	1.367	1.322	1.144	0.927	0.726	0.562	0.438	0.348	0.219	0.158	0.120	0.094	0.057	0.036	0.023	0.015	0.003	0.001	0.000	0.000
0.8	0	0.459	0.815	1.017	1.071	1.020	0.915	0.791	0.671	0.565	0.474	0.309	0.209	0.146	0.106	0.060	0.037	0.024	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000
0.9	0	0.395	0.728	0.937	1.074	1.094	1.044	0.952	0.841	0.725	0.616	0.394	0.251	0.164	0.113	0.061	0.038	0.025	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000
1	0	0.530	0.980	1.294	1.456	1.481	1.406	1.268	1.102	0.932	0.773	0.463	0.274	0.169	0.111	0.059	0.037	0.025	0.017	0.004	0.001	0.000	0.001

(d'après POULOS)

V=0		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-50.61	23.14	7.069	0.401	-1.197	-1.395	-1.228	-1.050	-0.885	-0.740	-0.463	-0.175	-0.104	-0.039	-0.015	-0.006	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003
0.2	-12.99	-0.311	5.468	3.474	1.509	0.438	-0.307	-0.394	-0.409	-0.390	-0.296	-0.135	-0.086	-0.036	-0.015	-0.007	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003
0.3	-5.960	-2.686	1.325	2.277	1.776	1.099	0.261	0.065	-0.048	-0.108	-0.146	-0.093	-0.066	-0.032	-0.015	-0.007	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003
0.4	-3.460	-2.308	0.273	0.937	1.212	1.043	0.514	0.321	0.185	0.091	-0.024	-0.054	-0.046	-0.026	-0.014	-0.007	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003
0.5	-2.273	-1.784	-0.729	0.173	0.636	0.750	0.553	0.418	0.302	0.209	0.064	0.001	-0.028	-0.021	-0.012	-0.006	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003
0.6	-1.598	-1.350	-0.767	-0.161	0.264	0.475	0.494	0.421	0.339	0.261	0.115	0.036	-0.015	-0.015	-0.010	-0.005	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003
0.7	-1.150	-1.014	-0.673	-0.275	0.056	0.269	0.391	0.364	0.315	0.258	0.133	0.055	-0.003	-0.010	-0.007	-0.004	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002
0.8	-0.795	-0.718	-0.516	-0.263	-0.030	0.140	0.238	0.276	0.250	0.213	0.119	0.054	0.003	-0.006	-0.005	-0.003	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002
0.9	-0.444	-0.405	-0.301	-0.167	-0.038	0.125	0.155	0.159	0.148	0.128	0.075	0.036	0.004	-0.003	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



V=0.2		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-30.71	34.75	12.50	3.347	0.614	-0.528	-0.578	-0.544	-0.479	-0.292	-0.181	-0.134	-0.031	-0.003	-0.031	-0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.2	-8.033	3.865	8.351	5.412	2.855	0.657	0.264	0.063	-0.036	-0.080	-0.089	-0.062	-0.018	-0.003	-0.018	-0.003	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.3	-3.725	-0.627	3.011	3.586	2.785	1.213	0.766	0.479	0.297	0.182	0.087	0.008	-0.002	-0.001	-0.002	-0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.4	-2.143	-1.054	0.843	1.884	2.000	1.306	0.966	0.701	0.505	0.363	0.176	0.067	0.031	-0.002	0.023	-0.002	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.5	-1.347	-0.878	0.112	0.926	1.296	1.173	0.972	0.775	0.605	0.466	0.226	0.112	0.051	0.019	0.019	0.002	-0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.6	-0.845	-0.613	-0.677	0.484	0.845	0.990	0.885	0.756	0.624	0.503	0.283	0.136	0.069	0.025	0.025	0.003	-0.000	-0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001
0.7	-0.452	-0.327	-0.156	0.338	0.615	0.808	0.769	0.686	0.586	0.485	0.291	0.140	0.074	0.025	0.025	0.003	-0.000	-0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001
0.8	-0.065	0.002	0.172	0.376	0.547	0.649	0.650	0.586	0.504	0.420	0.266	0.121	0.067	0.021	0.021	0.002	-0.000	-0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001
0.9	0.407	0.431	0.488	0.552	0.595	0.576	0.522	0.452	0.378	0.307	0.282	0.080	0.053	0.011	0.011	0.000	-0.001	-0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001
1	1.090	1.061	0.980	0.863	0.726	0.462	0.352	0.263	0.192	0.137	0.054	0.017	0.008	0.021	0.021	-0.002	-0.001	-0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001

(d'après POULOS)

τ/H																							
$V=0.4$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-10.92	46.27	17.83	6.214	2.359	0.905	0.306	0.056	-0.037	-0.058	-0.045	0.023	0.073	0.092	0.090	0.062	0.037	0.021	0.012	0.002	0.000	0.000	0.000
0.2	-3.121	8.002	11.20	7.322	4.180	2.377	1.390	0.844	0.537	0.362	0.262	0.158	0.125	0.107	0.089	0.057	0.034	0.020	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000
0.3	-1.487	1.442	4.709	4.912	3.814	2.696	1.866	1.303	0.929	0.679	0.511	0.282	0.179	0.124	0.091	0.052	0.031	0.018	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000
0.4	-0.775	0.251	2.014	2.888	2.845	2.405	1.906	1.475	1.136	0.878	0.684	0.381	0.224	0.140	0.092	0.047	0.027	0.016	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000
0.5	-0.318	0.125	1.049	1.774	2.048	1.980	1.747	1.469	1.204	0.973	0.781	0.445	0.254	0.148	0.091	0.042	0.024	0.014	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000
0.6	0.073	0.288	0.792	1.283	1.573	1.641	1.554	1.384	1.186	0.990	0.812	0.470	0.263	0.147	0.085	0.036	0.020	0.008	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000
0.7	0.492	0.601	0.875	1.172	1.377	1.449	1.404	1.282	1.121	0.949	0.784	0.453	0.247	0.133	0.073	0.029	0.016	0.010	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
0.8	1.024	1.071	1.192	1.320	1.397	1.411	1.314	1.182	1.022	0.856	0.700	0.391	0.204	0.104	0.055	0.021	0.013	0.008	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000
0.9	1.785	1.777	1.753	1.695	1.590	1.441	1.261	1.066	0.876	0.701	0.549	0.278	0.131	0.061	0.031	0.013	0.009	0.006	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
1	2.969	2.886	2.653	2.315	1.926	1.537	1.183	0.882	0.639	0.451	0.311	0.108	0.030	0.006	0.002	0.005	0.006	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000



τ/H																							
$V=0.5$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-1.101	51.95	20.42	7.561	3.146	1.412	0.743	0.347	0.412	0.320	0.256	0.173	0.135	0.102	0.082	0.041	0.019	0.008	0.028	0.005	0.001	0.000	0.000
0.2	-0.733	10.02	12.58	8.242	4.817	2.841	1.737	1.134	0.785	0.585	0.467	0.331	0.269	0.216	0.176	0.107	0.065	0.040	0.026	0.005	0.001	0.000	0.000
0.3	-0.393	2.464	5.556	5.581	4.344	3.122	2.216	1.597	1.182	0.903	0.712	0.444	0.310	0.238	0.171	0.098	0.059	0.037	0.024	0.005	0.001	0.000	0.000
0.4	-0.067	0.947	2.641	3.437	3.321	2.815	2.259	1.780	1.400	1.110	0.888	0.535	0.342	0.240	0.163	0.087	0.053	0.034	0.022	0.005	0.001	0.000	0.000
0.5	0.274	0.711	1.606	2.289	2.515	2.397	2.115	1.791	1.484	1.216	0.991	0.593	0.355	0.234	0.152	0.076	0.045	0.029	0.020	0.004	0.001	0.000	0.000
0.6	0.672	0.884	1.366	1.824	2.071	2.092	1.953	1.732	1.485	1.244	1.026	0.608	0.356	0.227	0.134	0.063	0.038	0.025	0.017	0.004	0.000	0.000	0.000
0.7	1.186	1.288	1.537	1.793	1.946	1.957	1.847	1.660	1.437	1.210	0.997	0.578	0.313	0.203	0.110	0.049	0.037	0.021	0.015	0.004	0.000	0.000	0.000
0.8	1.902	1.937	2.018	2.081	2.077	1.983	1.811	1.589	1.349	1.113	0.899	0.492	0.258	0.139	0.078	0.035	0.023	0.016	0.012	0.003	0.000	0.000	0.000
0.9	2.981	2.947	2.846	2.672	2.429	2.133	1.812	1.492	1.195	0.934	0.715	0.344	0.156	0.104	0.039	0.019	0.015	0.012	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000
1	4.695	4.556	4.171	3.612	2.974	2.341	1.770	1.291	0.911	0.623	0.412	0.123	0.023	-0.003	-0.005	0.004	0.008	0.008	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000

(d'après POULOS)

V=0		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-50.61	-6.674	4.276	3.849	2.738	1.913	1.353	0.972	0.708	0.522	0.388	0.192	0.099	0.052	0.028	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.2	-12.99	-7.822	-2.002	0.206	0.757	0.788	0.681	0.554	0.440	0.346	0.271	0.148	0.081	0.046	0.026	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.3	-5.960	-4.758	-2.600	-1.064	-0.279	0.062	0.190	0.221	0.213	0.190	0.162	0.103	0.063	0.038	0.023	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.4	-3.460	-3.054	-2.161	-1.299	-0.691	-0.324	-0.119	-0.011	0.042	0.065	0.072	0.062	0.044	0.029	0.019	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.5	-2.273	-2.101	-1.681	-1.200	-0.788	-0.486	-0.283	-0.154	-0.073	-0.025	0.003	0.028	0.027	0.021	0.015	0.007	0.003	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.6	-1.598	-1.513	-1.293	-1.014	-0.743	-0.517	-0.346	-0.223	-0.137	-0.080	-0.042	0.003	0.014	0.014	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.7	-1.150	-1.104	-0.70	-0.810	-0.633	-0.472	-0.339	-0.235	-0.158	-0.103	-0.064	-0.013	0.004	0.008	0.008	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.8	-0.795	-0.769	-0.697	-0.595	-0.482	-0.373	-0.279	-0.201	-0.141	-0.096	-0.064	-0.018	-0.001	0.004	0.005	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.9	-0.444	-0.431	-0.394	-0.341	-0.281	-0.222	-0.169	-0.124	-0.089	-0.062	-0.042	-0.014	-0.002	0.001	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



V=0.2		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-30.71	4.342	2.237	1.996	1.349	0.877	0.566	0.363	0.231	0.144	0.087	0.018	-0.002	-0.006	-0.005	-0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
0.2	-8.033	-4.929	-1.430	-0.097	0.246	0.279	0.231	0.171	0.119	0.079	0.050	0.011	-0.002	-0.005	-0.004	-0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
0.3	-3.725	-3.003	-1.705	-0.779	-0.303	-0.090	-0.006	0.023	0.027	0.023	0.016	0.002	-0.004	-0.005	-0.004	-0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
0.4	-2.143	-1.900	-1.365	-0.847	-0.482	-0.261	-0.136	-0.070	-0.035	-0.018	-0.010	-0.006	-0.005	-0.005	-0.004	-0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
0.5	-1.347	-1.245	-0.996	-0.712	-0.471	-0.296	-0.181	-0.108	-0.064	-0.039	-0.024	-0.010	-0.006	-0.003	-0.004	-0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
0.6	-0.845	-0.797	-0.672	-0.516	-0.367	-0.247	-0.159	-0.100	-0.061	-0.037	-0.023	-0.008	-0.005	-0.004	-0.003	-0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
0.7	-0.452	-0.429	-0.368	-0.287	-0.207	-0.138	-0.086	-0.050	-0.027	-0.014	-0.007	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
0.8	-0.065	-0.057	-0.039	-0.014	0.009	0.025	0.035	0.038	0.036	0.031	0.025	0.011	0.002	-0.002	-0.003	-0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
0.9	0.407	0.400	0.378	0.344	0.302	0.257	0.211	0.169	0.131	0.099	0.073	0.030	0.009	0.002	0.002	-0.002	-0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
1	1.089	1.060	0.979	0.861	0.725	0.587	0.460	0.351	0.261	0.190	0.136	0.053	0.016	0.002	0.002	-0.002	-0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000

(d'après POULOS)

$V=0.4$		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-10.91	-2.115	0.099	0.052	-0.120	-0.273	-0.283	-0.269	-0.244	-0.212	-0.132	-0.070	-0.039	-0.018	-0.009	0.007	0.008	0.006	0.004	0.004	0.000	0.000	-0.000
0.2	-3.121	-2.082	-0.903	-0.439	-0.298	-0.238	-0.221	-0.202	-0.180	-0.156	-0.099	-0.054	-0.039	-0.024	-0.007	0.007	0.008	0.006	0.004	0.004	0.000	0.000	-0.000
0.3	-1.487	-1.245	-0.807	-0.489	-0.319	-0.189	-0.162	-0.142	-0.124	-0.107	-0.070	-0.039	-0.018	-0.009	-0.005	0.006	0.007	0.006	0.004	0.004	0.000	0.000	-0.000
0.4	-0.775	-0.695	-0.518	-0.348	-0.228	-0.156	-0.093	-0.079	-0.069	-0.061	-0.043	-0.026	-0.012	-0.007	-0.003	0.006	0.007	0.006	0.004	0.004	0.000	0.000	-0.000
0.5	-0.318	-0.287	-0.214	-0.134	-0.072	-0.033	-0.014	-0.007	-0.010	-0.014	-0.017	-0.004	-0.004	-0.007	-0.001	0.006	0.007	0.006	0.004	0.004	0.000	0.000	-0.000
0.6	0.073	0.082	0.103	0.123	0.134	0.118	0.099	0.077	0.056	0.038	0.009	-0.002	-0.039	-0.002	0.001	0.006	0.007	0.006	0.004	0.004	0.000	0.000	-0.000
0.7	0.492	0.487	0.470	0.440	0.397	0.288	0.231	0.179	0.133	0.096	0.035	0.009	0.009	0.002	0.002	0.006	0.006	0.006	0.003	0.003	0.000	0.000	-0.000
0.8	1.024	1.004	0.945	0.855	0.745	0.507	0.398	0.303	0.223	0.160	0.061	0.018	0.018	0.005	0.003	0.006	0.006	0.006	0.003	0.003	0.000	0.000	-0.000
0.9	1.785	1.742	1.621	1.440	1.227	0.796	0.610	0.454	0.329	0.232	0.086	0.026	0.026	0.006	0.003	0.006	0.006	0.006	0.003	0.003	0.000	0.000	-0.000
1	2.970	2.886	2.653	2.315	1.926	1.183	0.882	0.640	0.452	0.311	0.108	0.030	0.030	0.006	0.002	0.005	0.005	0.004	0.003	0.003	0.000	0.000	-0.000



$V=0.5$		r/H																					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-1.101	-1.100	-1.089	-1.056	-0.991	-0.780	-0.658	-0.540	-0.434	-0.343	-0.181	-0.089	-0.040	-0.013	0	0	0.011	0.010	0.008	0.008	0.002	0.001	0.000
0.2	-0.733	-0.729	-0.716	-0.688	-0.644	-0.517	-0.443	-0.371	-0.305	-0.247	-0.138	-0.072	-0.034	-0.012	-0.012	0.006	0.010	0.009	0.008	0.002	0.002	0.001	0.000
0.3	-0.393	-0.391	-0.385	-0.373	-0.353	-0.294	-0.259	-0.223	-0.189	-0.158	-0.096	-0.054	-0.027	-0.011	0.005	0.005	0.009	0.009	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000
0.4	-0.067	-0.069	-0.074	-0.080	-0.086	-0.092	-0.091	-0.087	-0.082	-0.075	-0.056	-0.037	-0.021	-0.009	0.005	0.005	0.009	0.009	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000
0.5	0.274	0.267	0.248	0.218	0.183	0.145	0.108	0.045	0.023	0.005	-0.017	-0.020	-0.014	-0.007	0.003	0.003	0.008	0.008	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000
0.6	0.672	0.658	0.618	0.537	0.462	0.401	0.247	0.182	0.128	0.085	-0.019	-0.005	-0.009	-0.005	0.004	0.004	0.008	0.008	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000
0.7	1.184	1.159	1.088	0.980	0.849	0.707	0.440	0.330	0.238	0.165	0.053	0.008	-0.005	-0.004	0.004	0.004	0.008	0.008	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000
0.8	1.902	1.859	1.736	1.552	1.330	1.096	0.668	0.496	0.356	0.247	0.083	0.017	-0.002	-0.003	0.004	0.004	0.008	0.008	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000
0.9	2.981	2.905	2.690	2.373	2.001	1.618	0.946	0.688	0.485	0.331	0.107	0.023	-0.001	-0.003	0.005	0.005	0.009	0.008	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000
1	4.695	4.557	4.171	3.613	2.975	2.341	1.291	0.912	0.623	0.413	0.124	0.023	-0.003	-0.004	0.005	0.005	0.009	0.008	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000

(d'après POULOS)

BIBLIOGRAPHIE

Le coefficient R_H est dû à Taylor, cité par Poulos [4]. Le coefficient Z_H est également dû à Taylor et nous avons complété ses valeurs par interpolations et passage à la limite [2]. Les coefficients G_{H0} , G_{H1} , G_{H2} et H_{H2} sont dus à Poulos [4]. Quelques résultats ont été obtenus pour σ_z par Biot [1] pour $\nu = 0,5$ et Jelinek [3] pour $\nu = 0$. Ils concordent bien avec ceux de Poulos, beaucoup plus complets, que nous reproduisons ici. Nous remercions très vivement M. Poulos de nous avoir autorisé à reproduire ces résultats.

REFERENCES

- [1] M.A. BIOT, "Effect of certain discontinuities on the pressure distribution in a loaded soil", Physics, 6, 12 (December 1935), 367-374.
- [2] J.P. GIROUD, "Tassement d'une couche d'épaisseur finie de sol élastique sous l'effet de charges appliquées à sa surface", Revue Roumaine des Sciences Techniques, Mécanique Appliquée, 16, 3 (Bucarest 1971), 607-610.
- [3] R. JELINEK, "Der Einfluss von Gründungstiefe und begrenzter Schichtmächtigkeit auf die Druckausbreitung im Baugrund", Die Bautechnik, 28, 6 (Juni, 1951), 125-130.
- [4] H.G. POULOS, "Stresses and Displacements in an Elastic Layer Underlain by a Rough Rigid Base", Géotechnique, 17 (Décembre 1967), 378-410.

FORCE NORMALE CONCENTRÉE PONCTUELLE

(semelle sous poteau)
sur un sol composé de deux couches

2-3

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul du tassement.
- Calcul des contraintes.
- Tables et graphiques
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol sur lequel s'applique la force est formé de deux couches. La première a pour épaisseur H , pour module d'Young E_1 et pour coefficient de Poisson ν_1 . La seconde a une épaisseur infinie, un module E_2 et un coefficient de Poisson ν_2 (Fig. 1).

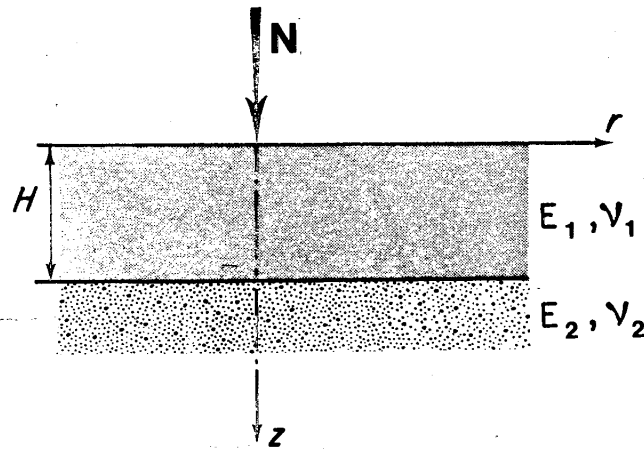


FIG. 1. — Définition du sol et de la charge.

DEFINITION DE LA CHARGE

Une force concentrée N est exercée à la surface du sol. Dans la pratique il n'existe pas de forces concentrées, toutefois ceci permet de faire un calcul approché des contraintes pour les points suffisamment éloignés du point d'application de la force.

CALCUL DU TASSEMENT

Le tassement d'un point quelconque de la surface du sol s'exprime indifféremment par l'une des deux formules :

$$w = \frac{N}{HE_1} Z_{2H} \qquad w = \frac{N}{rE_1} Z'_{2H}$$

avec :

w : tassement,

N : force normale exercée sur le sol,

H : épaisseur de la première couche de sol,

E_1 : module d'Young de la première couche de sol,

r : distance entre le point d'application de N et le point de la surface du sol où l'on calcule le tassement,

Z_{2H} , Z'_{2H} : coefficients sans dimensions dont les valeurs numériques sont données dans des tables en fonction de r/H , E_1/E_2 , ν_1 et ν_2 ,

E_2 : module d'Young de la deuxième couche de sol,

ν_1 , ν_2 : coefficients de Poisson de la première et de la deuxième couche de sol.

Les deux formules sont équivalentes mais la première est plus commode pour les petites valeurs de r/H et la seconde pour les petites valeurs de H/r .

2-3

Exemple 1 :

Soit une couche de sable de 10 m (33 ft) d'épaisseur, de module d'Young 19 bars (40 000 lb/sq.ft) et de coefficient de Poisson 0,25, reposant sur une couche d'argile de très grande épaisseur, de module d'Young 9,5 bars (20 000 lb/sq.ft) et de coefficient de Poisson 0,5. Evaluer le tassement à 8 m (26 ft) d'une charge verticale de 150 tonnes (330 000 lb).

On a :

$$r/H = 8/10 = 26/33 = 0,8 ; E_1/E_2 = 19/9,5 = 40\ 000/20\ 000 = 2 .$$

Pour ces valeurs, on lit dans la table relative à $\nu_1 = 0,25$ et $\nu_2 = 0,5$:

$$Z_{2H} = 0,65 .$$

D'où :

$$w = \frac{150 \times 9\ 810}{19 \times 10^5 \times 10} \times 0,65 = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm} ,$$

$$w = \frac{330\ 000}{40\ 000 \times 33} \times 0,65 = 0,16 \text{ ft} = 2 \text{ in} .$$

CALCUL DES CONTRAINTES

La valeur de σ_z en tout point du plan de séparation des deux couches est donnée par :

$$\sigma_z = \frac{N}{H^2} G_{2HO} ,$$

avec :

N : force concentrée exercée à la surface du sol ($z = 0$),

H : épaisseur de la première couche de sol,

G_{2HO} : coefficient sans dimensions donné par un graphique en fonction de r/H pour $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$,

r : distance à l'axe de la charge du point où on calcule σ_z ,

ν_1, ν_2 : coefficients de Poisson des deux couches.

Exemple 2 :

Considérons un sol composé de deux couches définies par : $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $E_1 = 50$ bars (105 000 lb/sq.ft) et $E_2 = 10$ bars (21 000 lb/sq.ft) et supportant à sa surface une force normale $N = 103 \times 10^4$ newtons (232 000 lb). L'épaisseur de la couche supérieure est $H = 6$ m (20 ft). Quelle est la contrainte σ_z à l'interface entre les deux couches à 2,4 m (8 ft) de l'axe de la charge ?

Pour $E_1/E_2 = 5$ et $r/H = 0,4$, on lit sur le graphique : $G_{2H0} = 0,20$.

D'où :

$$\sigma_z = \frac{103 \times 10^4}{36} \times 0,2 = 0,057 \times 10^5 \text{ newtons/m}^2 = 0,057 \text{ bar ,}$$

$$\sigma_z = \frac{232\ 000}{400} \times 0,2 = 116 \text{ lb/sq.ft. .}$$

Si le sol avait été homogène ($E_1/E_2 = 1$) on aurait eu :

$$G_{2H0} = G_0 = 0,329 \text{ (indépendant de } \nu \text{) .}$$

D'où :

$$\sigma_z = 0,094 \text{ bar (190 lb/sq.ft) .}$$

(Voir l'exemple 2 de la section "Force concentrée ponctuelle sur un sol homogène d'épaisseur infinie", Sect. 2-1 du Chap. 2.)

2-3

TABLES ET GRAPHIQUES

- Calcul du tassement :

Tables de Z_{2H} et Z'_{2H} pour $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$ et pour $\nu_1 = 0,25$ et $\nu_2 = 0,5$:
pp. 156 à 159.

- Calcul des contraintes :

Graphique de G_{2H0} pour le calcul de σ_z , avec $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$: p. 160.

13

$$Z_{2H} \quad \gamma_1 = 0.25 \quad \gamma_2 = 0.25$$

E_1/E_2

r/h	E_1/E_2											
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.2	1.49	1.80	2.05	2.35	2.55	2.80	3.25	3.60	4.50	5.30	6.75	7.80
0.4	0.75	1.05	1.33	1.58	1.80	2.03	2.43	2.83	3.70	4.48	5.85	6.98
0.6	0.50	0.78	1.03	1.28	1.48	1.70	2.12	2.47	3.25	4.08	5.30	6.38
0.8	0.37	0.64	0.89	1.11	1.33	1.53	1.94	2.29	3.10	3.85	5.18	6.44
1.0	0.30	0.54	0.76	0.97	1.18	1.37	1.78	2.11	2.92	3.67	4.93	6.10
1.2	0.25	0.47	0.67	0.88	1.07	1.25	1.61	1.96	2.73	3.45	4.65	5.79
1.4	0.21	0.41	0.59	0.79	0.97	1.15	1.50	1.82	2.56	3.24	4.44	5.59
1.6	0.19	0.36	0.53	0.73	0.88	1.04	1.38	1.69	2.39	3.03	4.19	5.33
1.8	0.17	0.33	0.49	0.66	0.81	0.96	1.27	1.57*	2.23	2.87	3.95	5.06
2.0	0.15	0.30	0.45	0.60	0.74	0.88	1.17	1.45	2.09	2.70	3.75	4.82
3.0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.80	1.01	1.57	2.07	3.03	3.87

(d'après MANDEL)

Z'
 $\gamma_1 = 0.25$
 $\gamma_2 = 0.25$
2H

E_1/E_2

r/h	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40
0	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298
0.2	0.298	0.36	0.41	0.47	0.51	0.56	0.65	0.72	0.90	1.06	1.35	1.56
0.4	0.298	0.42	0.53	0.63	0.72	0.81	0.97	1.13	1.48	1.79	2.34	2.79
0.6	0.298	0.47	0.62	0.77	0.89	1.02	1.27	1.48	1.95	2.45	3.18	3.83
0.8	0.298	0.51	0.71	0.89	1.06	1.22	1.55	1.83	2.48	3.08	4.14	5.15
1.0	0.298	0.54	0.76	0.97	1.18	1.37	1.78	2.11	2.92	3.67	4.93	6.10
1.2	0.298	0.56	0.80	1.05	1.28	1.50	1.93	2.35	3.28	4.14	5.58	6.95
1.4	0.298	0.57	0.83	1.10	1.36	1.61	2.10	2.55	3.58	4.54	6.21	7.83
1.6	0.298	0.58	0.85	1.16	1.40	1.66	2.20	2.70	3.82	4.85	6.70	8.52
1.8	0.298	0.59	0.88	1.19	1.45	1.73	2.28	2.82	4.02	5.16	7.11	9.10
2.0	0.298	0.59	0.90	1.19	1.48	1.75	2.33	2.90	4.17	5.40	7.50	9.64
3.0	0.298	0.60	0.91	1.20	1.50	1.80	2.40	3.05	4.70	6.20	9.10	11.62

(d'après MANDEL)

3

Z
 $\gamma_1 = 0.25$
 $\gamma_2 = 0.50$
2H

E_1/E_2

r/h	E_1/E_2										
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.2	1.50	1.80	2.10	2.30	2.60	2.80	3.20	3.55	4.40	5.20	6.50
0.4	0.75	1.05	1.33	1.58	1.80	2.00	2.40	2.75	3.60	4.35	5.60
0.6	0.50	0.80	1.07	1.30	1.47	1.70	2.07	2.42	3.25	3.97	5.23
0.8	0.38	0.65	0.89	1.11	1.33	1.51	1.90	2.25	3.04	3.73	4.91
1.0	0.30	0.55	0.77	0.97	1.17	1.36	1.72	2.05	2.80	3.44	4.57
1.2	0.24	0.48	0.68	0.87	1.05	1.23	1.57	1.88	2.59	3.27	4.27
1.4	0.21	0.43	0.60	0.79	0.96	1.12	1.44	1.74	2.41	3.10	4.01
1.6	0.18	0.38	0.53	0.71	0.87	1.03	1.33	1.61	2.26	2.88	3.83
1.8	0.16	0.33	0.48	0.64	0.78	0.92	1.20	1.47	2.10	2.68	3.64
2.0	0.15	0.30	0.44	0.59	0.72	0.85	1.12	1.38	1.96	2.50	3.49
3.0	0.10	0.20	0.29	0.39	0.48	0.57	0.75	0.93	1.38	1.84	2.72

(d'après MANDEL)

$$Z' = 2H$$

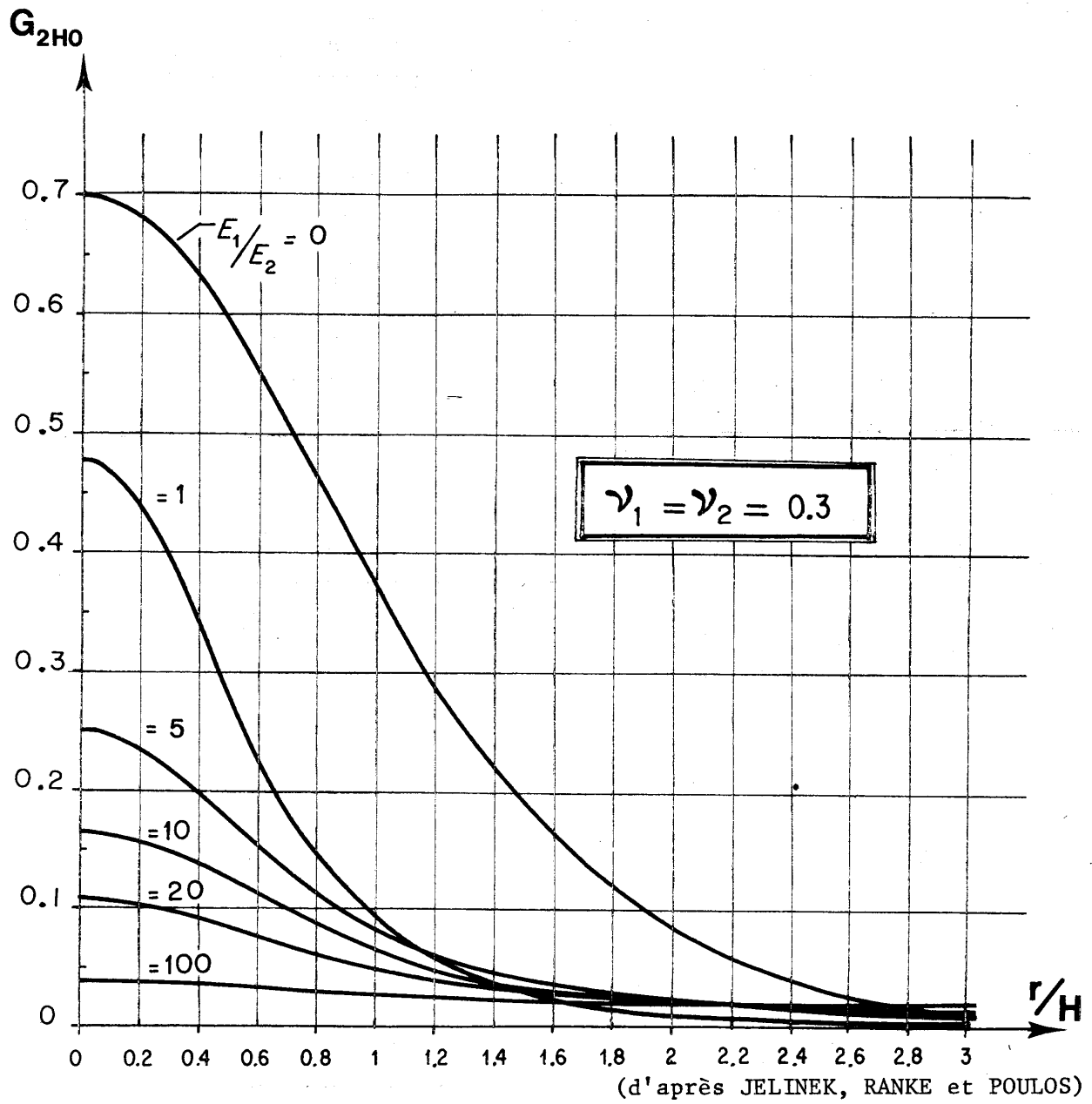
$$\nu_1 = 0.25$$

$$\nu_2 = 0.50$$

E_1/E_2

r/h	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
0	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298	0.298
0.2	0.30	0.36	0.42	0.46	0.52	0.56	0.64	0.71	0.88	1.04	1.30
0.4	0.30	0.42	0.53	0.63	0.72	0.80	0.96	1.10	1.44	1.74	2.24
0.6	0.30	0.48	0.64	0.78	0.88	1.02	1.24	1.45	1.95	2.38	3.14
0.8	0.30	0.52	0.71	0.89	1.06	1.21	1.52	1.80	2.43	2.98	3.93
1.0	0.30	0.55	0.77	0.97	1.17	1.36	1.72	2.05	2.80	3.44	4.57
1.2	0.29	0.57	0.81	1.04	1.26	1.48	1.88	2.26	3.11	3.92	5.12
1.4	0.29	0.60	0.84	1.10	1.34	1.57	2.02	2.44	3.38	4.34	5.62
1.6	0.29	0.60	0.85	1.13	1.39	1.64	2.12	2.57	3.62	4.61	6.13
1.8	0.29	0.60	0.86	1.15	1.41	1.66	2.16	2.64	3.78	4.82	6.55
2.0	0.29	0.60	0.87	1.17	1.44	1.70	2.23	2.75	3.91	4.99	6.97
3.0	0.29	0.60	0.87	1.18	1.45	1.71	2.25	2.80	4.15	5.53	8.15

(d'après MANDEL)



BIBLIOGRAPHIE

Nous avons obtenu les coefficients Z_{2H} et Z'_{2H} à partir de calculs faits par Mandel [2]. Le coefficient G_{2H0} a été calculé par Jelinek et Ranke [1] pour $E_1 > E_2$ et par Poulos [3] pour $E_2 = \infty$.

REFERENCES

- [1] R. JELINEK und A. RANKE, "Berechnung der Spannungsverteilung in einem Zweischichtensystem", Die Bautechnik, 2 (1970), 48-57.
- [2] J. MANDEL, "Consolidation des couches d'argile", Comptes Rendus du 4^e Congrès international de Mécanique des Sols et de Fondations, 1, 3a/21 (Londres 1957), 360-367.
- [3] H.G. POULOS, "Stresses and Displacements in an Elastic Layer Underlain by a Rough Rigid Base", Géotechnique, 17 (Décembre 1967), 38-410.

**FORCE NORMALE CONCENTRÉE SUR UNE LIGNE
DE LONGUEUR FINIE**

(semelle filante)
sur un sol homogène d'épaisseur infinie

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul direct du tassement.
- Calcul des contraintes.
- Tables et graphiques.
- Expressions des coefficients.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol est supposé homogène sur une épaisseur infinie ("milieu semi-infini"). S'il n'est pas homogène, les valeurs données ici pour σ_z peuvent cependant être considérées comme une bonne approximation des contraintes réelles (sauf, peut-être, dans le cas d'une *couche de sol très dur reposant sur des terrains bien plus mous*). Au contraire, pour que les valeurs du tassement données ici soient correctes, il faut que les hypothèses (homogénéité et épaisseur infinie) soient respectées, au moins avec une bonne approximation.

DEFINITION DE LA CHARGE

Le système d'axes Oxyz est un trièdre trirectangle de sens direct. La surface du sol est le plan Oxy et la verticale descendante est l'axe Oz (Fig. 1).

La charge est une force par unité de longueur, f_n , normale à la surface du sol et uniformément répartie sur une droite de longueur b , issue de O et portée par Oy (Fig. 1). Cette charge permet de représenter *une semelle filante* pour calculer le tassement ou les contraintes en des points dont la distance à l'axe de la semelle est assez grande par rapport à la largeur de la semelle.

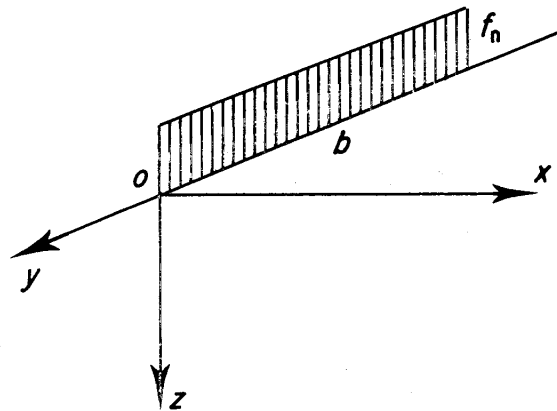


FIG. 1. — Définition de la charge normale f_n uniformément répartie sur une ligne de longueur b .

CALCUL DIRECT DU TASSEMENT

Le tassement peut être calculé en tout point de la surface du sol de la manière suivante :

a) Point de l'axe Ox (Fig. 2)

Son tassement est donné directement par la formule suivante :

$$(1) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} f_n k_w$$

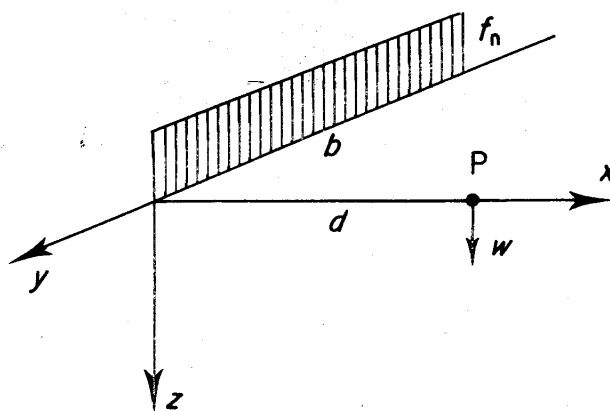


FIG. 2. — Calcul du tassement d'un point P de l'axe Ox.

avec :

E, ν : module d'Young et coefficient de Poisson du sol,

f_n : force par unité de longueur exercée à la surface du sol,

k_w : coefficient sans dimensions donné dans une table et un graphique en fonction de d/b ,

d : distance entre la charge et le point où l'on calcule le tassement,

b : longueur de la charge.

b) Point quelconque de la surface du sol

On procède par *superposition* à partir de la formule (1). Deux cas sont à envisager :

• Point tel que P_1 (Fig. 3) :

$$(2) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} f_n \left[k_{w1} + k_{w2} \right],$$

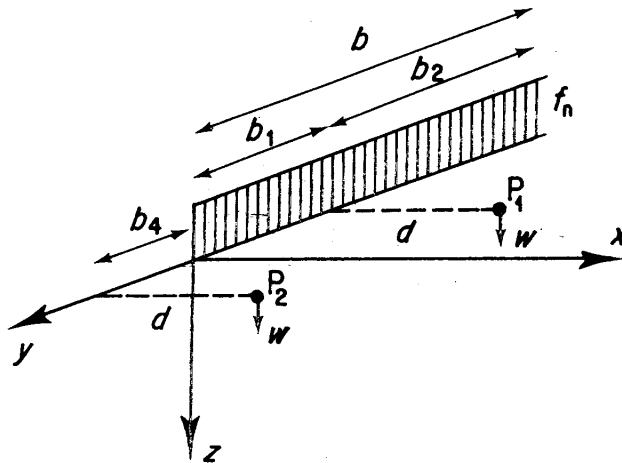


FIG. 3. — Calcul du tassement en deux points quelconques P_1 et P_2 .

où :

k_{w1} est calculé avec d/b_1 ,

k_{w2} est calculé avec d/b_2 .

• Point tel que P_2 (Fig. 3) :

$$(3) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} f_n \left[k_{w3} - k_{w4} \right],$$

où :

k_{w3} est calculé avec $d/(b + b_4)$,

k_{w4} est calculé avec d/b_4 .

Exemple 1 :

Considérons une semelle filante AB de 14 m (46 ft) de long et 60 cm (2 ft) de large chargée de 0,8 bar (11,6 p.s.i.). On demande le tassement au point C sachant que le module d'Young du sol est $E = 14 \text{ bars} = 200 \text{ p.s.i.}$ et que le coefficient de Poisson est $\nu = 0,3$ (Fig. 4).

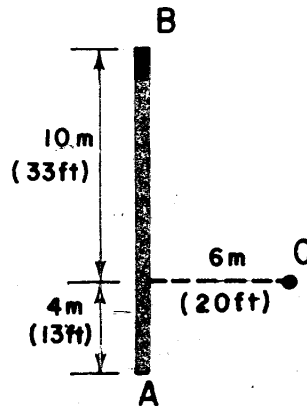


FIG. 4. — Définition de la semelle AB de l'exemple 1.

Calculons d'abord la charge par unité de longueur de la semelle :

$$f_n = 0,8 \times 10^5 \times 0,6 = 48\,000 \text{ newtons/m} = 4,9 \text{ t/m} = 11,6 \times 2 \times 144 = 3\,340 \text{ lb/ft} .$$

Déterminons ensuite les deux coefficients k_{w1} et k_{w2} à utiliser dans la formule (2) :

$$b_1 = 4 \text{ m (13 ft)} \rightarrow d/b_1 = 6/4 = 20/13 = 1,5$$

d'où $k_{w1} = 0,199$ (lu dans la table) ;

$$b_2 = 10 \text{ m (33 ft)} \rightarrow d/b_2 = 6/10 = 20/33 = 0,6$$

d'où $k_{w2} = 0,409$ (lu dans la table).

On peut alors calculer le tassement :

$$w = \frac{1 - (0,3)^2}{14,5 \times 10^5} \times 48\,000 \times (0,199 + 0,409) = 0,018 \text{ m} = 1,8 \text{ cm} ,$$

$$w = \frac{1 - (0,3)^2}{200 \times 144} \times 3\,340 \times (0,199 + 0,409) = 0,065 \text{ ft} = 3/4 \text{ in} .$$

CALCUL DES CONTRAINTES

Seule la valeur de σ_z est donnée ici. Le processus est analogue à celui du calcul du tassement.

a) Point du plan Ozx

La valeur de σ_z en un point P du plan Ozx (Fig. 5) est donnée par l'une des deux formules suivantes :

$$(4) \quad \sigma_z = \frac{f_n}{b} k_b = \frac{f_n}{d} k_d$$

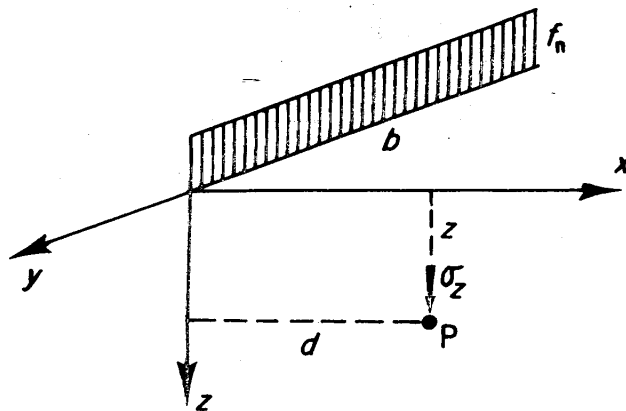


FIG. 5. — Calcul de σ_z en un point P du plan Ozx.

avec :

f_n : force par unité de longueur exercée à la surface du sol,

d : distance entre le plan moyen de la charge et le point où l'on calcule σ_z ,

b : longueur de la charge,

k_b, k_d : coefficients sans dimensions dont les valeurs numériques sont données dans des tables et graphiques.

La première formule est plus agréable lorsque d/b est petit et la seconde lorsque d/b est grand.

b) Point quelconque

On procède par superposition à partir de la formule (4). Deux cas sont à envisager.

• Point tel que P_1 (Fig. 6) :

$$(5) \quad \sigma_z = f_n \left[\frac{k_{b_1}}{b_1} + \frac{k_{b_2}}{b_2} \right] = \frac{f_n}{d} \left[k_{d_1} + k_{d_2} \right]$$

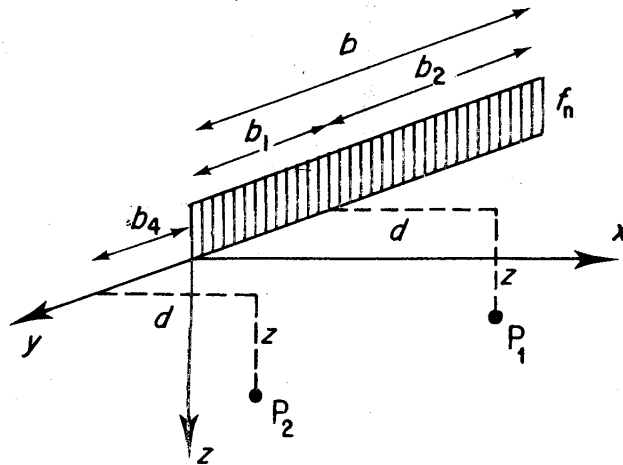


FIG. 6. — Calcul de σ_z en deux points quelconques P_1 et P_2 .

où :

k_{b_1} et k_{d_1} sont calculés avec $b = b_1$,

k_{b_2} et k_{d_2} sont calculés avec $b = b_2$.

• Point tel que P_2 (Fig. 6) :

$$(6) \quad \sigma_z = f_n \left[\frac{k_{b_3}}{b + b_4} - \frac{k_{b_4}}{b_4} \right] = \frac{f_n}{d} \left[k_{d_3} - k_{d_4} \right]$$

où :

k_{b_3} et k_{d_3} sont calculés avec $b = b + b_4$,

k_{b_4} et k_{d_4} sont calculés avec $b = b_4$.

Exemple 2 :

Considérons une semelle filante de 9 m (30 ft) de long supportant une charge de 144 000 newtons/m (9 900 lb/ft). On demande la contrainte σ_x au point D à la profondeur de 2,4 m (8 ft) (Fig. 7).

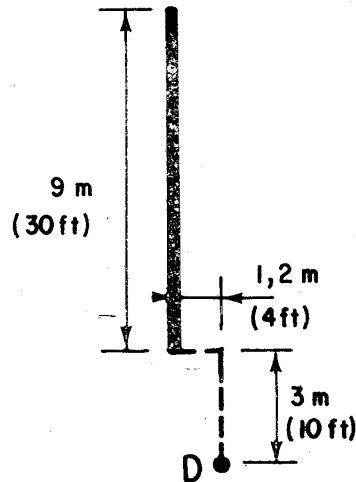


FIG. 7. — Définition de la semelle filante de l'exemple 2.

Utilisons les deux formules (6).

Formule du premier type :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{(b + b_4)} &= \frac{1,2}{12} = \frac{4}{40} = 0,1 \\ \frac{z}{(b + b_4)} &= \frac{2,4}{12} = \frac{8}{40} = 0,2 \end{aligned} \right\} k_b = 1,018 ,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{b_4} &= \frac{1,2}{3} = \frac{4}{10} = 0,4 \\ \frac{z}{b_4} &= \frac{2,4}{3} = \frac{[8]}{10} = 0,8 \end{aligned} \right\} k_b = 0,232 .$$

D'où :

$$\sigma_z = \frac{144\,000}{10^5} \left[\frac{1,018}{12} - \frac{0,232}{3} \right] = 0,01 \text{ bar} ,$$

$$\sigma_z = 9\,900 \left[\frac{1,018}{40} - \frac{0,232}{10} \right] = 22 \text{ lb/sq.ft} .$$

Formule du deuxième type :

$$\left. \begin{aligned} \frac{b + b_4}{d} &= \frac{12}{1,2} = \frac{40}{4} = 10 \\ \frac{z}{d} &= \frac{2,4}{1,2} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned} \right\} k_d = 0,102 .$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_4}{d} &= \frac{3}{1,2} = \frac{10}{4} = 2,5 \\ \frac{z}{d} &= \frac{2,4}{1,2} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned} \right\} k_d = 0,093 .$$

D'où :

$$\sigma_z = \frac{144\,000}{1,2 \times 10^5} (0,102 - 0,093) = 0,01 \text{ bar} ,$$

$$\sigma_z = \frac{9\,900}{4} (0,102 - 0,093) = 22 \text{ lb/sq.ft} .$$

4

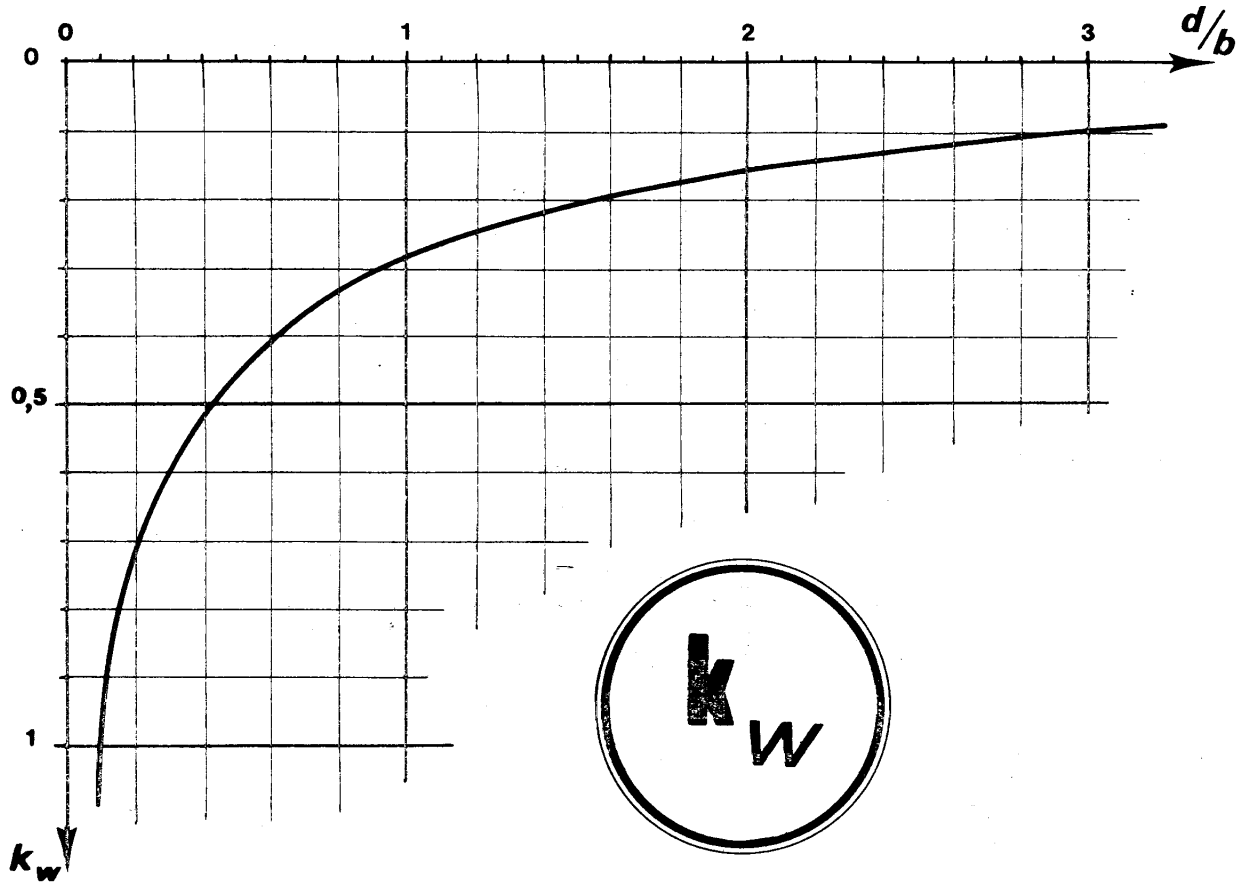
TABLES ET GRAPHIQUES

– Calcul direct du tassement

Table et graphique de k_w : p. 173.

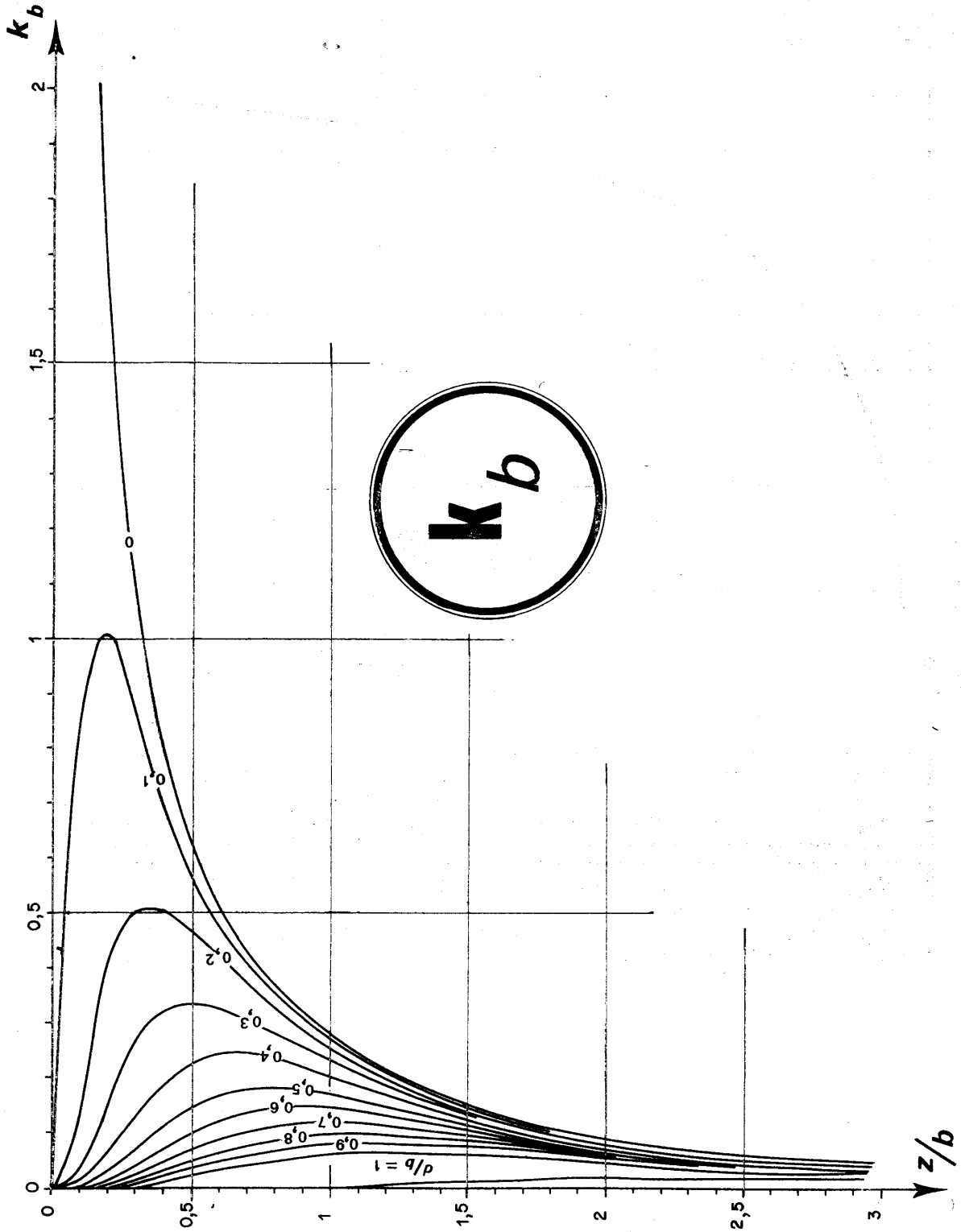
– Calcul de σ_z

Tables et graphiques de k_b et k_d : pp. 174 à 177.



2-4

d/b	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
k_w	∞	0,954	0,736	0,611	0,524	0,460	0,409	0,367	0,333	0,305	0,281
d/b	1,1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2	2,5	3	5	$d/b > 5$
k_w	0,260	0,241	0,211	0,199	0,188	0,169	0,153	0,124	0,104	0,063	$\frac{1}{\sqrt{d/b}}$

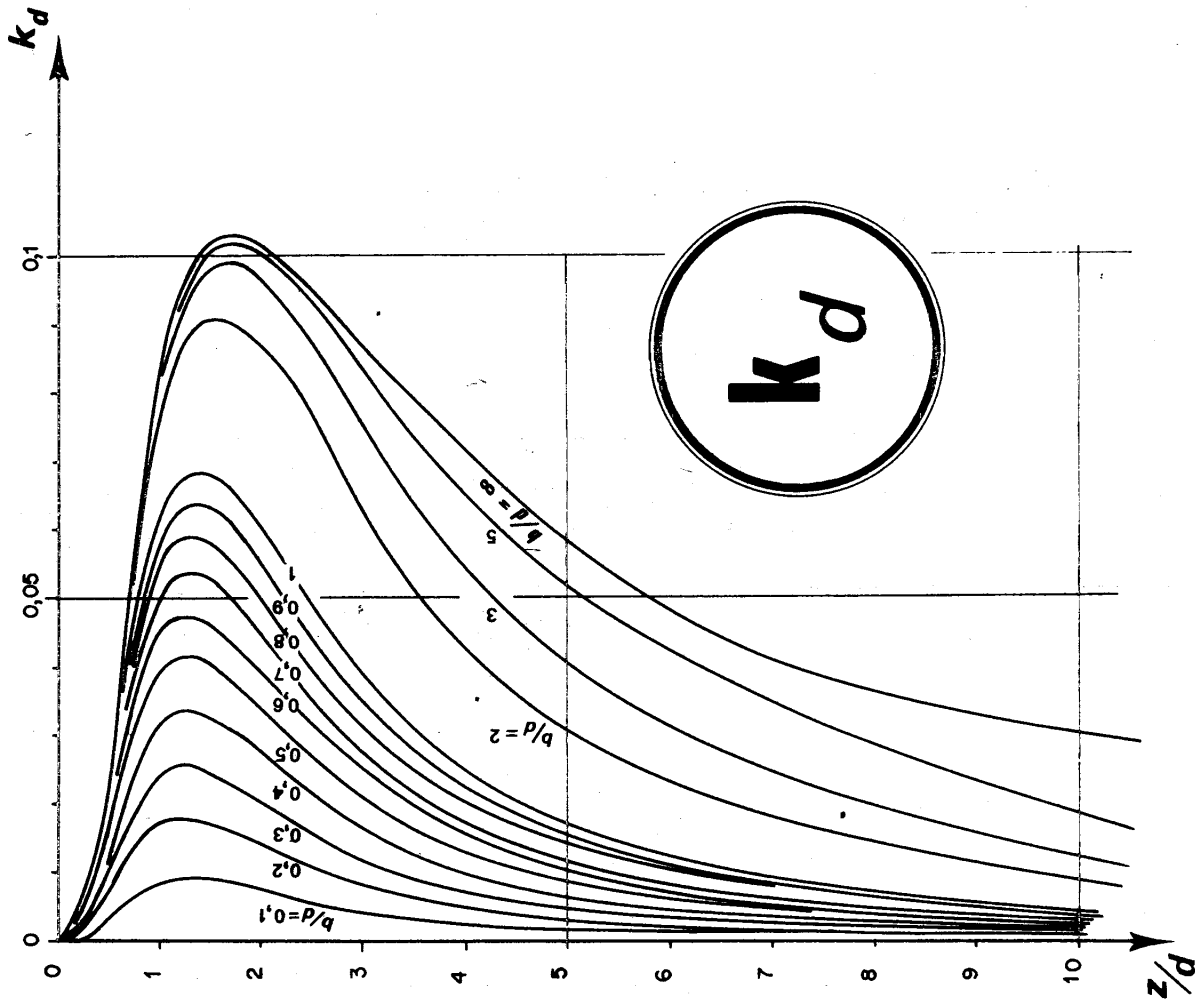


$\frac{d}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3	5	10	∞
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	3,183	0,796	0,127	0,032	0,011	0,005	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0
0,2	1,591	1,018	0,397	0,150	0,063	0,030	0,015	0,009	0,005	0,003	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0
0,3	1,058	0,857	0,506	0,263	0,135	0,072	0,041	0,024	0,015	0,010	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0
0,4	0,790	0,699	0,504	0,321	0,194	0,117	0,072	0,045	0,029	0,019	0,013	0,001	0,000	0,000	0,000	0
0,5	0,626	0,578	0,463	0,335	0,228	0,152	0,100	0,067	0,045	0,031	0,022	0,001	0,000	0,000	0,000	0
0,6	0,515	0,487	0,415	0,326	0,241	0,173	0,122	0,086	0,061	0,043	0,031	0,002	0,000	0,000	0,000	0
0,7	0,434	0,416	0,369	0,306	0,241	0,183	0,137	0,101	0,074	0,055	0,040	0,003	0,001	0,000	0,000	0
0,8	0,371	0,359	0,327	0,282	0,232	0,185	0,144	0,111	0,084	0,064	0,049	0,004	0,001	0,000	0,000	0
0,9	0,322	0,313	0,290	0,257	0,219	0,181	0,146	0,116	0,091	0,072	0,056	0,006	0,001	0,000	0,000	0
1	0,281	0,275	0,259	0,234	0,204	0,174	0,144	0,118	0,095	0,077	0,061	0,007	0,001	0,000	0,000	0
1,2	0,220	0,217	0,207	0,192	0,174	0,154	0,134	0,115	0,097	0,081	0,067	0,010	0,002	0,000	0,000	0
1,4	0,176	0,174	0,168	0,159	0,147	0,134	0,120	0,106	0,093	0,080	0,069	0,013	0,003	0,000	0,000	0
1,5	0,158	0,157	0,152	0,145	0,136	0,125	0,113	0,101	0,089	0,078	0,068	0,015	0,004	0,000	0,000	0
1,6	0,143	0,142	0,138	0,132	0,125	0,116	0,106	0,096	0,086	0,076	0,067	0,016	0,004	0,000	0,000	0
1,8	0,119	0,118	0,115	0,111	0,106	0,100	0,093	0,086	0,078	0,071	0,063	0,018	0,005	0,001	0,000	0
2	0,100	0,099	0,097	0,095	0,091	0,086	0,081	0,076	0,070	0,065	0,059	0,019	0,006	0,001	0,000	0
2,5	0,068	0,067	0,067	0,065	0,064	0,062	0,059	0,056	0,054	0,051	0,047	0,021	0,008	0,001	0,000	0
3	0,049	0,049	0,048	0,047	0,047	0,046	0,044	0,043	0,041	0,039	0,038	0,020	0,009	0,002	0,000	0
5	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,017	0,017	0,017	0,013	0,009	0,003	0,000	0
10	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,004	0,004	0,003	0,001	0

K_b

$\frac{b/d}{z/d}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3	5	10	∞
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	0	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
0,3	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
0,4	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013	0,013	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
0,5	0	0,003	0,007	0,010	0,012	0,015	0,017	0,018	0,020	0,021	0,022	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025
0,6	0	0,005	0,009	0,014	0,017	0,021	0,024	0,026	0,028	0,030	0,031	0,036	0,037	0,037	0,037	0,037
0,7	0	0,006	0,012	0,017	0,022	0,027	0,030	0,034	0,036	0,039	0,040	0,048	0,049	0,049	0,049	0,049
0,8	0	0,007	0,014	0,020	0,026	0,032	0,036	0,040	0,044	0,047	0,049	0,058	0,060	0,061	0,061	0,061
0,9	0	0,008	0,016	0,023	0,029	0,036	0,041	0,046	0,050	0,053	0,056	0,068	0,070	0,071	0,071	0,071
1	0	0,008	0,017	0,024	0,032	0,038	0,044	0,049	0,054	0,058	0,061	0,076	0,079	0,079	0,080	0,080
1,2	0	0,009	0,018	0,026	0,034	0,041	0,048	0,054	0,059	0,063	0,067	0,087	0,091	0,092	0,092	0,092
1,4	0	0,009	0,017	0,025	0,033	0,041	0,047	0,054	0,059	0,064	0,069	0,091	0,097	0,099	0,100	0,100
1,5	0	0,008	0,017	0,025	0,033	0,040	0,047	0,053	0,058	0,063	0,068	0,092	0,099	0,101	0,102	0,102
1,6	0	0,008	0,016	0,024	0,032	0,039	0,045	0,052	0,057	0,062	0,067	0,092	0,099	0,102	0,103	0,103
1,8	0	0,008	0,015	0,022	0,029	0,036	0,042	0,048	0,054	0,059	0,063	0,090	0,099	0,102	0,103	0,103
2	0	0,007	0,014	0,020	0,027	0,033	0,039	0,044	0,049	0,054	0,059	0,087	0,096	0,101	0,102	0,102
2,5	0	0,005	0,010	0,016	0,021	0,026	0,030	0,035	0,039	0,043	0,047	0,075	0,086	0,093	0,094	0,095
3	0	0,004	0,008	0,012	0,016	0,020	0,024	0,027	0,031	0,034	0,038	0,062	0,075	0,083	0,086	0,086
5	0	0,002	0,003	0,005	0,007	0,009	0,010	0,012	0,014	0,015	0,017	0,031	0,041	0,052	0,058	0,059
10	0	0,000	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,009	0,013	0,019	0,028	0,031

Kd



2-4

EXPRESSION DES COEFFICIENTS :

$$k_w = \frac{r}{\pi} \text{Log} \frac{b + \sqrt{b^2 + d^2}}{d},$$

$$k_b = \frac{1}{2\pi} \frac{b^2 z^3}{d^2 + z^2} \frac{1}{\sqrt{d^2 + b^2 + z^2}} \left[\frac{1}{d^2 + b^2 + z^2} + \frac{2}{d^2 + z^2} \right],$$

$$k_d = \frac{d}{b} k_b.$$

BIBLIOGRAPHIE

Nous avons calculé l'expression et les valeurs numériques des coefficients k_w , k_b et k_d mais ceci n'a fait l'objet d'aucune publication. Signalons que Fadum [1] avait déjà, de son côté, calculé la contrainte σ_z et en avait donné graphiquement les valeurs numériques. Bien entendu, les résultats que l'on peut obtenir avec nos coefficients k_b et k_d concordent parfaitement avec les valeurs calculées par Fadum.

REFERENCE

- [1] R.E. FADUM, "Influence values for estimating stresses in elastic foundations", Proc. 2^e Int. Conf. Soil. Mech. and Found. Eng., 3 (Rotterdam 1948), 78.

FONDATEIONS CIRCULAIRES

Fondation circulaire supportant une charge normale uniforme

- sur un sol homogène d'épaisseur infinie Section 3-1
- sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie Section 3-2
- sur un sol composé de deux couches Section 3-3
- sur un sol composé de trois couches Section 3-4
- sur un sol dont le module augmente avec la profondeur Section 3-5

Fondation circulaire rigide à charge centrée

- sur un sol homogène d'épaisseur infinie Section 3-6
- sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie Section 3-7

Fondation circulaire rigide à charge excentrée

- sur un sol homogène d'épaisseur infinie Section 3-8

Remblai conique ou tronconique

- sur un sol homogène d'épaisseur infinie Section 3-9

Fondation annulaire

- sur un sol homogène d'épaisseur infinie Section 3-10



**FONDATION CIRCULAIRE EXERÇANT
UNE CHARGE NORMALE UNIFORME**

(Réservoir, Radier souple)
sur un sol homogène d'épaisseur infinie

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Formules pour le calcul des contraintes.
- Formules pour le calcul des déformations.
- Tables et graphiques.
- Expression des coefficients.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol est supposé homogène sur une épaisseur infinie ("*milieu semi-infini*"). S'il n'est pas homogène, les valeurs données ici pour les contraintes (en particulier pour σ_z) peuvent cependant être considérées comme une bonne approximation des contraintes réelles (sauf, peut-être, dans le cas *d'une couche de sol très très dur reposant sur des terrains bien plus mous*). Au contraire, pour que les valeurs du tassement et de la rotation données ici soient correctes, il faut que les hypothèses (homogénéité et épaisseur infinie) soient respectées, du moins avec une bonne approximation. Par exemple, si le sol est composé d'une couche H reposant sur un substratum un peu déformable, il faut, pour que l'erreur sur le tassement soit inférieure à 10 %, que H soit supérieure à 6 fois le rayon de la fondation.

DEFINITION DE LA CHARGE

La charge est constituée par une pression uniforme exercée sur un cercle de rayon R à la surface du sol (Fig. 1). Cette charge est à peu près celle d'un *radier souple* (de grandes dimensions) ou d'un *réservoir de pétrole*.

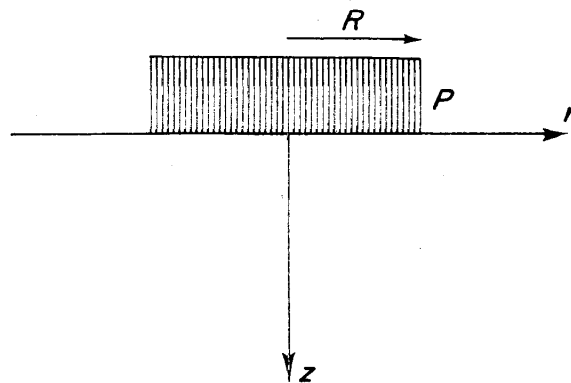


FIG. 1. — Définition de la charge circulaire uniforme.

CALCUL DES CONTRAINTES

Les contraintes en tout point du sol sont données en coordonnées cylindriques par les formules suivantes :

$$(1) \quad \sigma_r = p \left[K_r - (1 - 2\nu) K'_r \right] \quad (2) \quad \sigma_\theta = p \left[K_\theta - (1 - 2\nu) K'_\theta \right]$$

$$(3) \quad \sigma_z = pK_z \quad (4) \quad \tau_{zr} = pK_{zr} \quad (5) \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$$

et la *contrainte moyenne* est donnée par :

$$(6) \quad \sigma_m = \frac{2(1 + \nu)}{3} pN'_z .$$

avec :

p : contrainte normale uniforme exercée sur le cercle du rayon R ,

ν : coefficient de Poisson du sol,

K et N : coefficient sans dimension donnés dans les tableaux, en fonction de z/R et r/R ,

r, z : coordonnées du point où l'on calcule des contraintes.

Exemple 1 :

Quelle est la contrainte σ_r à la profondeur $z = 9 \text{ m}$ (30 ft) sous le bord d'un réservoir plein de pétrole de poids volumique 700 kg/m^3 (44 lb/cu.ft) ? Le réservoir vide pèse 90 tonnes (200 000 lb), son diamètre est 15 m (50 ft) et sa hauteur 11 m (36 ft). Le coefficient de Poisson du sol est $\nu = 0,3$.

Calculons d'abord la pression uniforme :

$$p = \frac{90 \times 9\,810}{\pi(7,5)^2} + 700 \times 9,81 \times 11 = 5\,000 + 75\,500 = 80\,500 \text{ pascals} = 0,805 \text{ bar}$$

$$p = \frac{200\,000}{\pi(25)^2} + 44 \times 36 = 100 + 1\,580 = 1\,680 \text{ lb/sq.ft.}$$

Les coefficients, lus dans les tables, pour $r/R = 1$ et $z/R = 1,2$ sont :

$$K_r = 0,115 \quad \text{et} \quad K'_r = 0,094 ;$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0,805 [0,115 - 0,4 \times 0,094] = 0,06 \text{ bar} \\ &= 1\,680 [0,115 - 0,4 \times 0,094] = 130 \text{ lb/sq.ft.} \end{aligned}$$

CALCUL DES DEPLACEMENTS

Le déplacement de tous les points du sol est donné, en coordonnées cylindriques, par les formules suivantes :

$$(7) \quad u_r = \frac{1 + \nu}{E} pR [M_r - (1 - 2\nu) M'_r]$$

$$(8) \quad u_\theta = 0$$

$$(9) \quad w = \frac{1 + \nu}{E} pR [M_z + (1 - 2\nu) M'_z] .$$

En particulier, pour les points de la surface du sol ($z = 0$), on a :

$$(10) \quad w = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} p R M_z$$

avec :

u_r : composante radiale du déplacement,

w : tassement (composante verticale du déplacement),

ν : coefficient de Poisson du sol,

E : module d'Young du sol,

R : rayon du cercle chargé,

p : charge uniforme exercée par la fondation,

M : coefficients sans dimensions donnés dans les tableaux en fonction de z/R et r/R ,

z, r : coordonnées du point dont on calcule le déplacement.

Exemple 2 :

Quel est le tassement de la surface du sol à 7,5 m (25 ft) du bord du réservoir de pétrole défini dans l'exemple précédent sachant que le module d'Young du sol (supposé homogène sur une épaisseur très grande vis-à-vis du rayon de la fondation) est : $E = 38$ bars (80 000 lb/sq.ft) ?

Le point dont on calcule le tassement a pour coordonnées $z = 0, r = 15$ m (50 ft) d'où : $r/R = 2$

ce qui donne : $M_z = M'_z = 0,258$,

$$w = \frac{2(1 - 0,09)}{38} \times 0,805 \times 7,5 \times 0,258 = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$$

$$w = \frac{2(1 - 0,09)}{80\,000} \times 1\,680 \times 25 \times 0,258 = 0,25 \text{ ft} = 3 \text{ in.}$$

CALCUL DES DEFORMATIONS

Les déformations en tout point du sol sont données en coordonnées cylindriques par les formules suivantes :

$$(11) \quad \epsilon_r = \frac{1 + \nu}{E} p \left[N_r - (1 - 2\nu) K'_\theta \right]$$

$$(12) \quad \epsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{E} p \left[N_\theta - (1 - 2\nu) K'_r \right]$$

$$(13) \quad \epsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} p [N_z - (1 - 2\nu) N'_z]$$

$$(14) \quad \gamma_{zr} = \frac{1 + \nu}{E} p K_{zr}$$

$$(15) \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$$

et la *dilatation cubique* est donnée par :

$$(16) \quad \epsilon = - \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} p N'_z$$

avec :

p : contrainte normale uniforme exercée sur le cercle du rayon R ,

ν : coefficient de Poisson du sol,

E : module d'Young du sol,

K et N : coefficients sans dimensions donnés dans les tableaux en fonction de z/R et r/R ,

r, z : coordonnées du point où l'on calcule les déformations.

Exemple 3 :

Reprenons les deux exemples précédents. Quelle est la déformation verticale ϵ_z au point où l'on a calculé σ_r ?

Les coefficients, lus dans les tables, pour $r/R = 1$ et $z/R = 1,2$ sont :

$$N_z = -0,149 \quad N'_z = 0,151 ;$$

on a donc :

$$\epsilon_z = \frac{1,3}{38} 0,805 [-0,149 - (0,4) 0,151] = -0,0057$$

$$\epsilon_z = \frac{1,3}{80\,000} 1\,680 [-0,149 - 0,04 \times 0,151] = -0,0057$$

(Le signe - indique une compression.)

TABLES ET GRAPHIQUES

- Calcul des contraintes :

Coefficients : $K_r, K'_r, K_\theta, K'_\theta, K_z, K_{zr}$: pp. 186 à 197.

- Calcul des déplacements :

Coefficients : M_r, M'_r, M_z, M'_z : pp. 198 à 205.

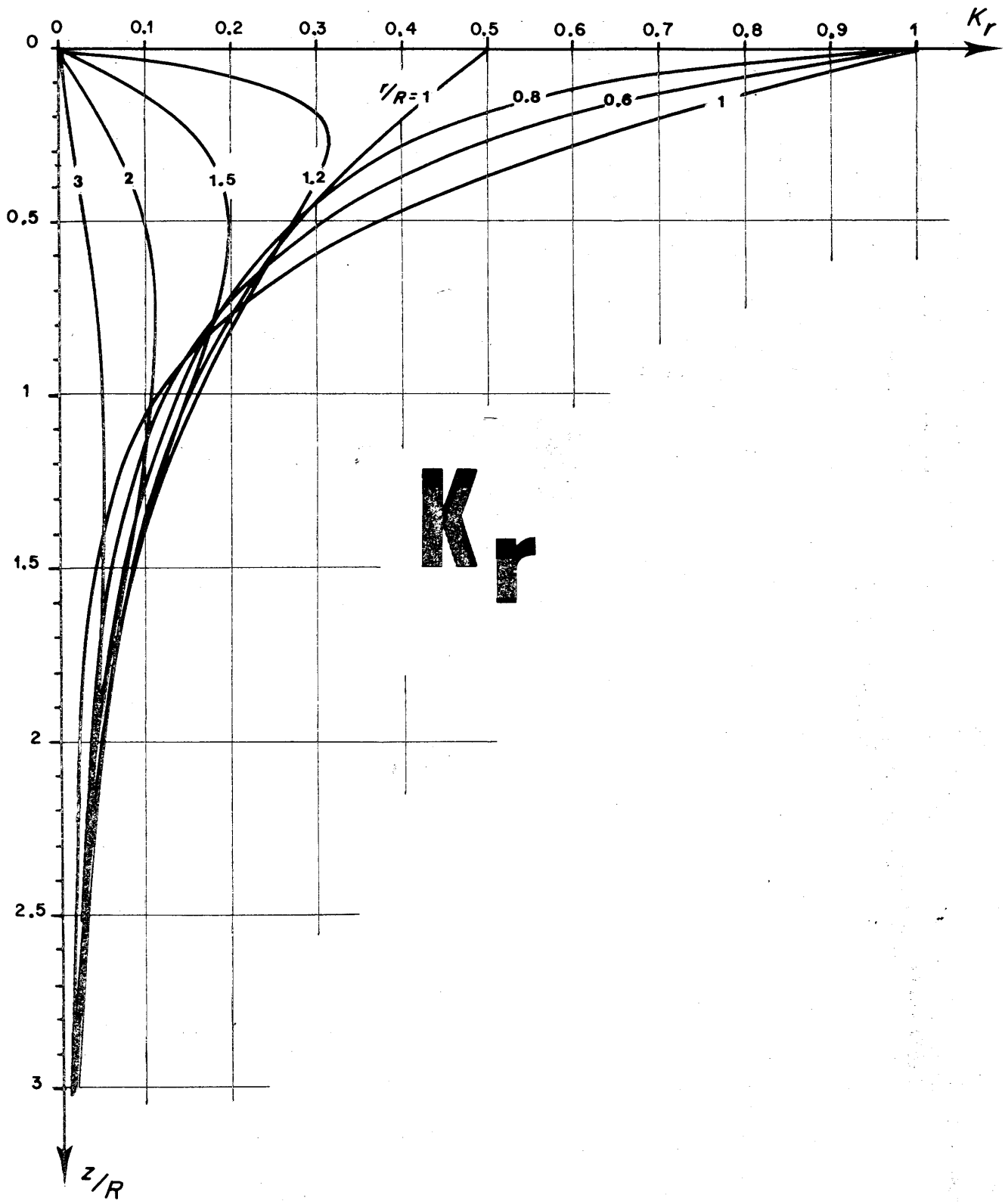
- Calcul des déformations :

Coefficients : N_r, N_θ, N_z, N'_z : pp. 206 à 209.

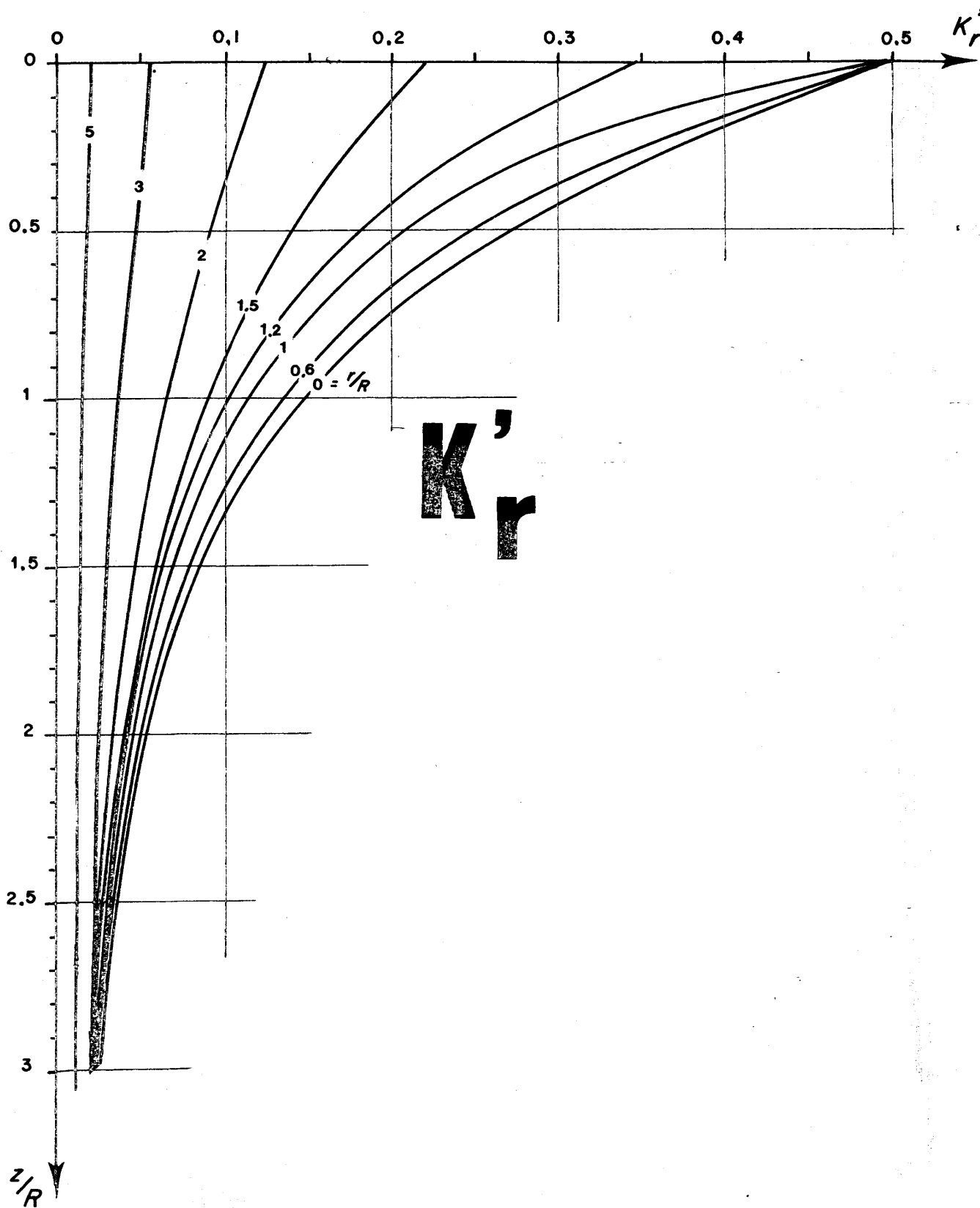
K r		r/R																	
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.852	0.846	0.827	0.784	0.667	0.452	0.216	0.073	0.024	0.006	0.003	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.710	0.700	0.670	0.605	0.484	0.407	0.303	0.132	0.047	0.012	0.005	0.003	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.581	0.570	0.539	0.477	0.391	0.364	0.314	0.170	0.065	0.018	0.008	0.004	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.469	0.458	0.427	0.378	0.331	0.323	0.297	0.190	0.081	0.023	0.010	0.005	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.5	0.374	0.366	0.341	0.308	0.286	0.287	0.273	0.196	0.094	0.028	0.012	0.006	0.006	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.6	0.297	0.290	0.278	0.255	0.247	0.253	0.247	0.193	0.104	0.034	0.014	0.007	0.007	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
0.7	0.235	0.231	0.221	0.213	0.214	0.206	0.221	0.185	0.107	0.037	0.016	0.008	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
0.8	0.185	0.183	0.179	0.178	0.185	0.196	0.198	0.173	0.112	0.041	0.018	0.009	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
0.9	0.146	0.147	0.147	0.150	0.160	0.172	0.177	0.161	0.108	0.043	0.020	0.010	0.010	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000
1	0.116	0.117	0.118	0.125	0.139	0.151	0.156	0.147	0.106	0.044	0.021	0.011	0.011	0.007	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000
1.2	0.075	0.077	0.082	0.091	0.103	0.115	0.124	0.123	0.099	0.047	0.024	0.013	0.013	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
1.5	0.040	0.043	0.048	0.057	0.067	0.078	0.086	0.091	0.083	0.048	0.026	0.014	0.014	0.009	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001
2	0.017	0.020	0.021	0.027	0.034	0.042	0.048	0.055	0.058	0.043	0.027	0.017	0.017	0.011	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001
2.5	0.008	0.010	0.011	0.014	0.019	0.024	0.028	0.034	0.039	0.035	0.025	0.017	0.017	0.012	0.008	0.006	0.003	0.002	0.001
3	0.004	0.005	0.007	0.008	0.011	0.014	0.016	0.021	0.027	0.028	0.022	0.017	0.017	0.012	0.008	0.006	0.003	0.002	0.002
4	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.006	0.007	0.009	0.012	0.016	0.016	0.014	0.014	0.011	0.009	0.007	0.005	0.003	0.002
5	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.007	0.009	0.010	0.010	0.010	0.009	0.008	0.006	0.005	0.003	0.002
6	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.004	0.006	0.007	0.007	0.007	0.008	0.007	0.006	0.005	0.003	0.002
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.005	0.003	0.002
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.002	0.002
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002

K r

r/R



3-1



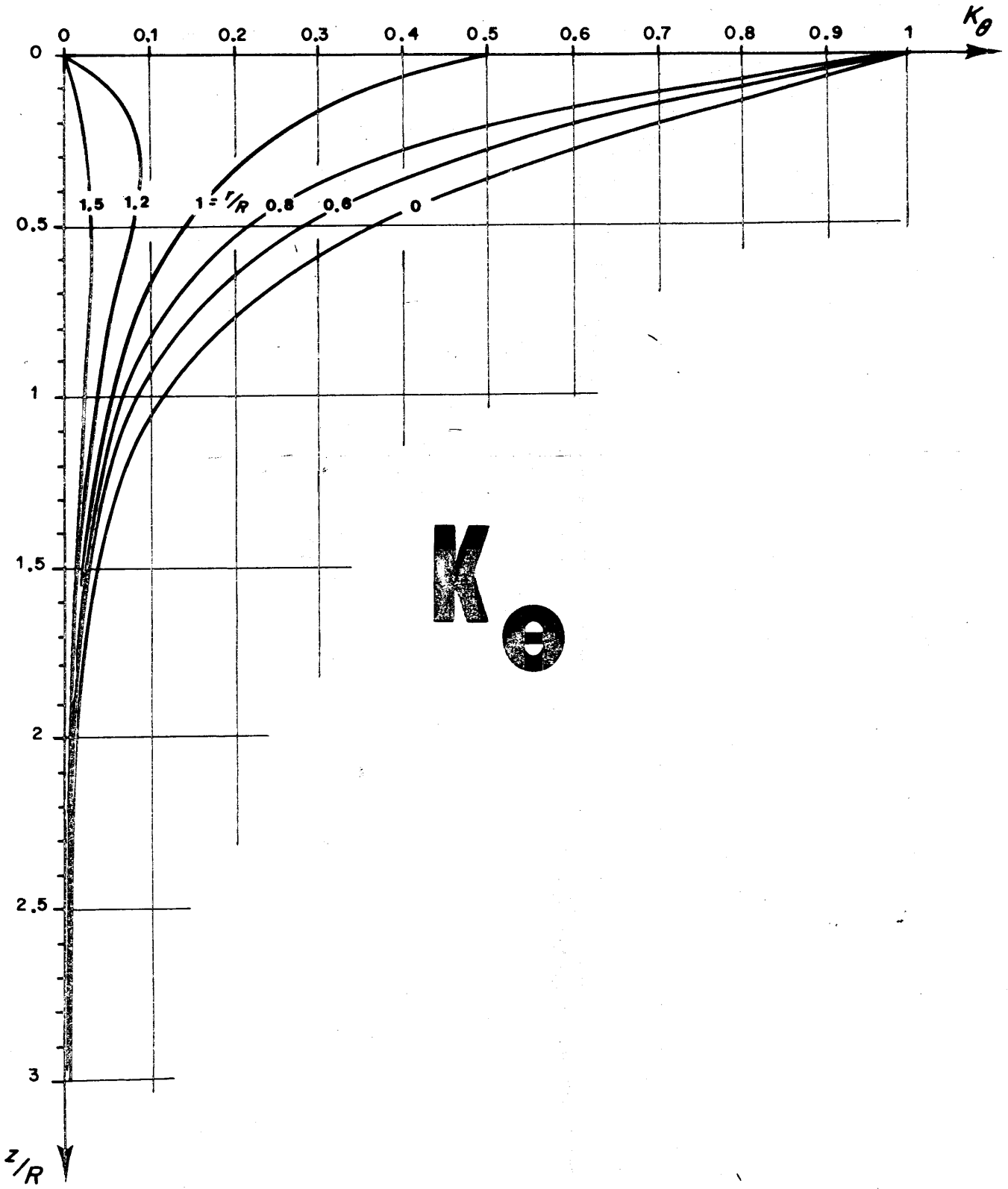
K_r		r/R																
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.347	0.222	0.125	0.056	0.031	0.020	0.014	0.010	0.008	0.005	0.003	0.003
0.1	0.450	0.449	0.447	0.442	0.430	0.392	0.304	0.204	0.118	0.054	0.030	0.020	0.014	0.010	0.008	0.005	0.003	0.003
0.2	0.402	0.400	0.396	0.387	0.368	0.328	0.266	0.187	0.111	0.052	0.030	0.019	0.013	0.010	0.008	0.005	0.003	0.003
0.3	0.357	0.354	0.338	0.337	0.316	0.280	0.233	0.170	0.104	0.050	0.029	0.018	0.013	0.010	0.008	0.005	0.003	0.002
0.4	0.314	0.312	0.305	0.293	0.272	0.242	0.205	0.154	0.098	0.048	0.028	0.018	0.013	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002
0.5	0.276	0.274	0.267	0.255	0.236	0.212	0.182	0.140	0.092	0.046	0.027	0.018	0.013	0.009	0.007	0.005	0.003	0.002
0.6	0.243	0.242	0.234	0.223	0.207	0.185	0.162	0.127	0.085	0.044	0.026	0.017	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003	0.002
0.7	0.213	0.211	0.205	0.195	0.181	0.162	0.144	0.116	0.080	0.042	0.026	0.017	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003	0.002
0.8	0.187	0.186	0.180	0.172	0.160	0.145	0.129	0.106	0.075	0.041	0.025	0.017	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003	0.002
0.9	0.166	0.163	0.159	0.152	0.141	0.130	0.117	0.097	0.070	0.039	0.024	0.016	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003	0.002
1	0.146	0.145	0.146	0.135	0.126	0.116	0.105	0.088	0.066	0.037	0.023	0.016	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003	0.002
1.2	0.116	0.114	0.112	0.107	0.101	0.094	0.087	0.075	0.057	0.034	0.022	0.015	0.011	0.008	0.007	0.004	0.003	0.002
1.5	0.084	0.084	0.082	0.079	0.075	0.071	0.066	0.059	0.047	0.030	0.020	0.014	0.010	0.008	0.006	0.005	0.003	0.002
2	0.053	0.051	0.051	0.050	0.048	0.047	0.044	0.041	0.035	0.024	0.017	0.013	0.009	0.007	0.006	0.004	0.003	0.002
2.5	0.036	0.035	0.035	0.034	0.033	0.032	0.032	0.030	0.026	0.019	0.014	0.011	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002
3	0.026	0.025	0.025	0.025	0.024	0.024	0.023	0.022	0.020	0.016	0.012	0.010	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
4	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.014	0.014	0.014	0.013	0.011	0.009	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002
5	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.006	0.006	0.005	0.004	0.004	0.003	0.002	0.002
6	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002
7	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001
8	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001
9	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
10	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001

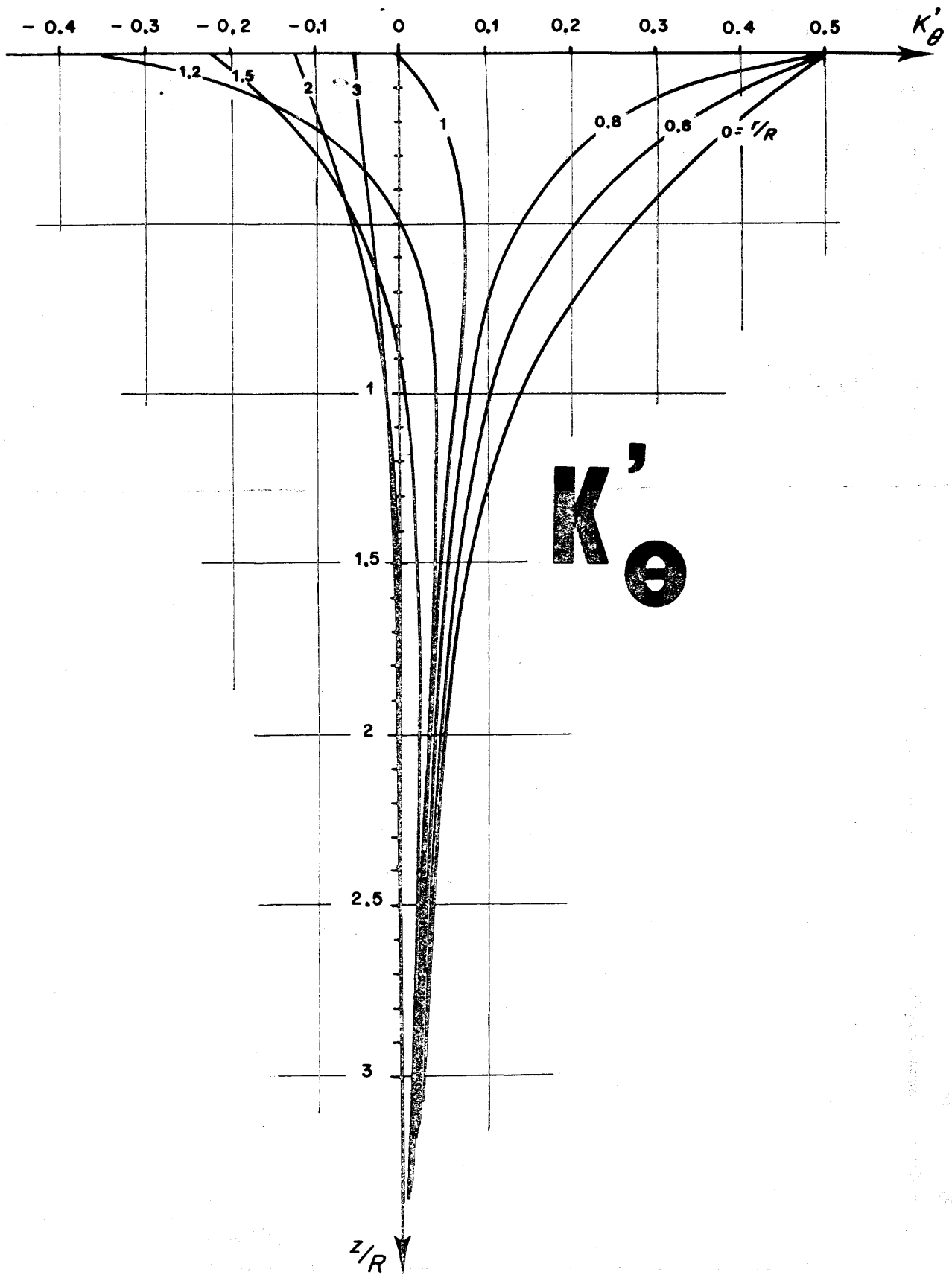




K θ	r/R																	
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0	1	1	1	1	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.852	0.847	0.834	0.804	0.721	0.354	0.055	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.710	0.704	0.680	0.630	0.516	0.274	0.083	0.019	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.581	0.572	0.542	0.486	0.378	0.173	0.089	0.023	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.469	0.459	0.430	0.375	0.285	0.115	0.085	0.024	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.374	0.365	0.338	0.289	0.220	0.141	0.077	0.028	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0.297	0.288	0.265	0.225	0.172	0.115	0.068	0.028	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0.235	0.228	0.208	0.176	0.136	0.095	0.059	0.026	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0.185	0.179	0.164	0.139	0.109	0.078	0.051	0.025	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.146	0.142	0.130	0.111	0.087	0.064	0.044	0.023	0.008	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.116	0.113	0.103	0.089	0.072	0.054	0.038	0.020	0.007	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.075	0.072	0.067	0.058	0.048	0.038	0.028	0.017	0.007	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	0.040	0.038	0.037	0.033	0.027	0.023	0.018	0.012	0.006	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.017	0.014	0.014	0.013	0.012	0.011	0.008	0.007	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.008	0.005	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.004	0.003	0.002	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

n/R



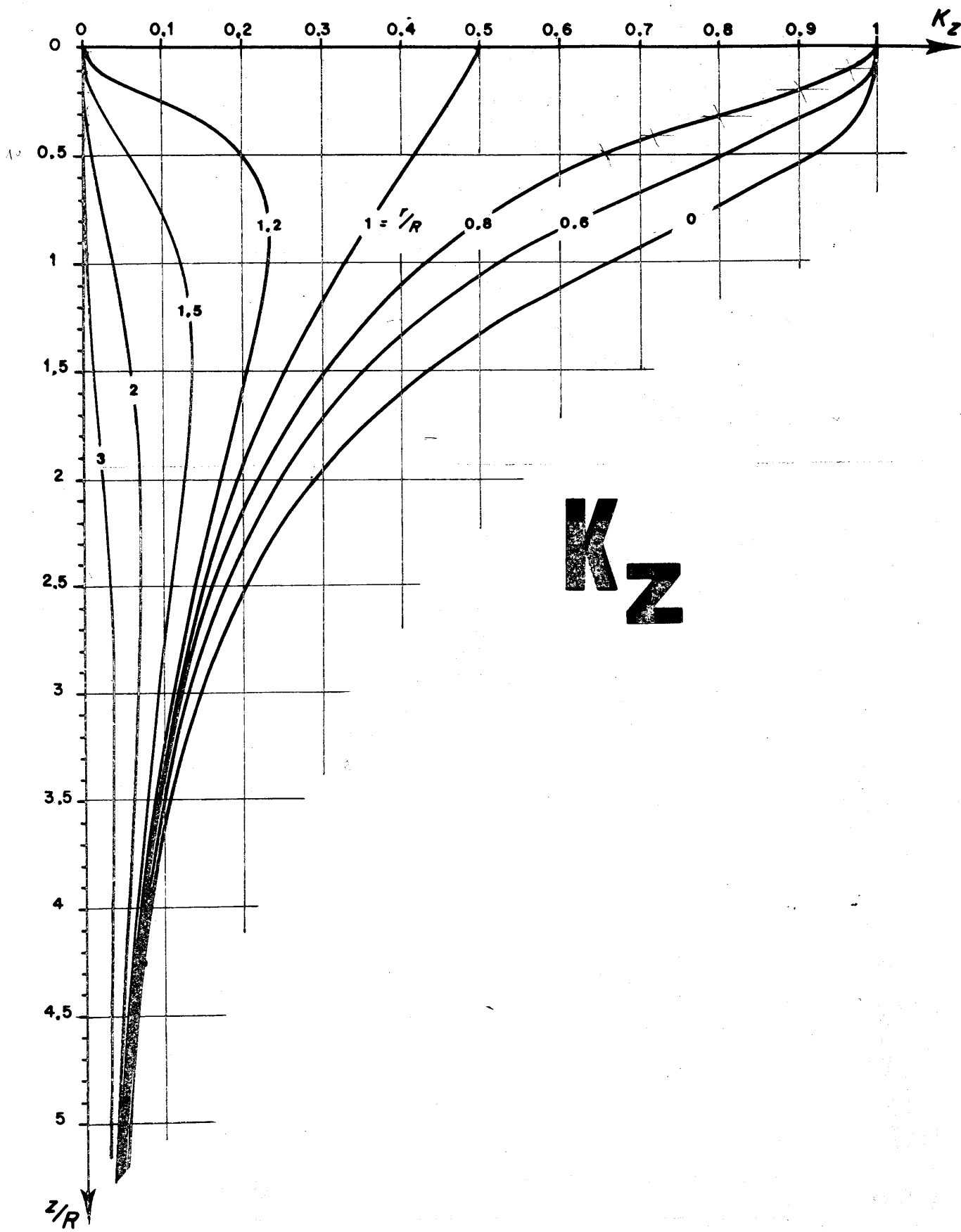


K'	r/R																	
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0.1	0.451	0.448	0.440	0.420	0.358	0.000	-0.347	-0.222	-0.125	-0.056	-0.031	-0.020	-0.014	-0.010	-0.008	-0.005	-0.003	-0.003
0.2	0.402	0.398	0.383	0.348	0.262	0.038	-0.208	-0.176	-0.109	-0.052	-0.030	-0.020	-0.014	-0.010	-0.008	-0.005	-0.003	-0.002
0.3	0.356	0.351	0.345	0.290	0.205	0.064	-0.053	-0.098	-0.080	-0.044	-0.026	-0.017	-0.013	-0.010	-0.007	-0.005	-0.003	-0.002
0.4	0.314	0.308	0.287	0.245	0.171	0.068	-0.018	-0.068	-0.067	-0.040	-0.024	-0.017	-0.012	-0.009	-0.007	-0.005	-0.003	-0.002
0.5	0.276	0.270	0.249	0.209	0.148	0.070	0.004	-0.045	-0.055	-0.036	-0.023	-0.016	-0.012	-0.009	-0.007	-0.005	-0.003	-0.002
0.6	0.243	0.234	0.217	0.181	0.130	0.071	0.018	-0.027	-0.045	-0.032	-0.021	-0.015	-0.011	-0.009	-0.007	-0.005	-0.003	-0.002
0.7	0.213	0.208	0.190	0.159	0.117	0.070	0.027	-0.014	-0.035	-0.029	-0.020	-0.014	-0.011	-0.008	-0.007	-0.004	-0.003	-0.002
0.8	0.188	0.183	0.167	0.141	0.106	0.068	0.033	-0.004	-0.028	-0.026	-0.018	-0.014	-0.010	-0.008	-0.007	-0.004	-0.003	-0.002
0.9	0.166	0.162	0.147	0.125	0.097	0.065	0.036	0.004	-0.021	-0.023	-0.017	-0.013	-0.010	-0.008	-0.006	-0.004	-0.003	-0.002
1	0.146	0.143	0.124	0.112	0.089	0.063	0.038	0.010	-0.014	-0.020	-0.016	-0.012	-0.009	-0.009	-0.006	-0.004	-0.003	-0.002
1.2	0.116	0.114	0.105	0.094	0.075	0.057	0.039	0.017	-0.004	-0.015	-0.013	-0.011	-0.008	-0.007	-0.006	-0.004	-0.003	-0.002
1.5	0.084	0.082	0.077	0.069	0.059	0.048	0.037	0.022	0.004	-0.009	-0.010	-0.009	-0.007	-0.006	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002
2	0.053	0.053	0.050	0.046	0.042	0.036	0.030	0.022	0.010	-0.002	-0.005	-0.006	-0.005	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002	-0.002
2.5	0.036	0.037	0.035	0.033	0.030	0.028	0.024	0.019	0.012	0.002	-0.002	-0.004	-0.004	-0.004	-0.003	-0.003	-0.002	-0.002
3	0.026	0.026	0.023	0.024	0.023	0.021	0.019	0.016	0.011	0.004	-0.001	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.002	-0.002	-0.001
4	0.015	0.015	0.014	0.014	0.014	0.013	0.013	0.011	0.009	0.004	0.002	0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
5	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.007	0.005	0.003	0.001	0.000	0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
6	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
10	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000

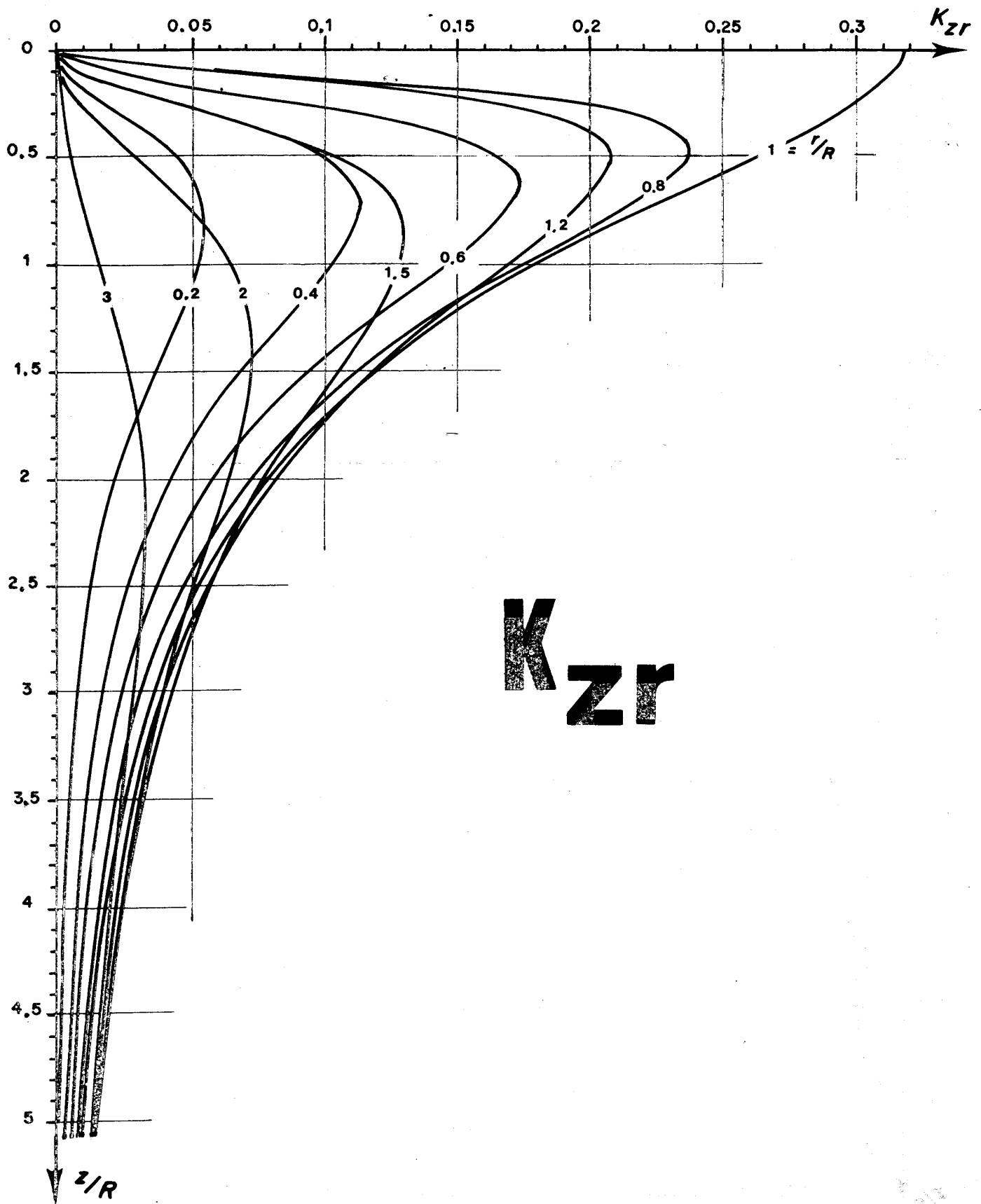
3-1

K Z		r/R																	
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0.1	1.000	0.998	0.998	0.995	0.976	0.484	0.017	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.993	0.991	0.987	0.970	0.890	0.468	0.076	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.977	0.973	0.963	0.922	0.794	0.452	0.137	0.022	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.949	0.943	0.919	0.861	0.712	0.434	0.179	0.041	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.911	0.902	0.869	0.795	0.646	0.418	0.207	0.060	0.010	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0.864	0.852	0.814	0.732	0.591	0.400	0.225	0.079	0.016	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0.812	0.799	0.756	0.673	0.544	0.367	0.233	0.095	0.023	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0.756	0.742	0.698	0.619	0.504	0.366	0.237	0.108	0.028	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.701	0.688	0.644	0.570	0.467	0.349	0.238	0.119	0.035	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.647	0.634	0.591	0.525	0.435	0.333	0.235	0.126	0.042	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.547	0.535	0.502	0.447	0.377	0.300	0.226	0.136	0.053	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	0.424	0.416	0.392	0.354	0.308	0.256	0.205	0.137	0.065	0.014	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.285	0.286	0.267	0.248	0.224	0.196	0.168	0.127	0.073	0.022	0.008	0.003	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.200	0.197	0.190	0.180	0.167	0.151	0.135	0.109	0.072	0.028	0.011	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.146	0.145	0.141	0.135	0.127	0.118	0.109	0.092	0.067	0.031	0.014	0.007	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.087	0.087	0.085	0.082	0.079	0.075	0.072	0.065	0.053	0.031	0.017	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
5	0.057	0.057	0.056	0.054	0.053	0.052	0.050	0.046	0.041	0.027	0.017	0.011	0.006	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
6	0.041	0.040	0.039	0.039	0.038	0.038	0.036	0.035	0.032	0.024	0.017	0.011	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
7	0.030	0.030	0.029	0.029	0.029	0.028	0.028	0.027	0.025	0.020	0.015	0.010	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001
8	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.021	0.021	0.020	0.016	0.014	0.010	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001
9	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.017	0.017	0.017	0.014	0.012	0.009	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001
10	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.014	0.014	0.014	0.012	0.010	0.009	0.007	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001

Z/R



3-1



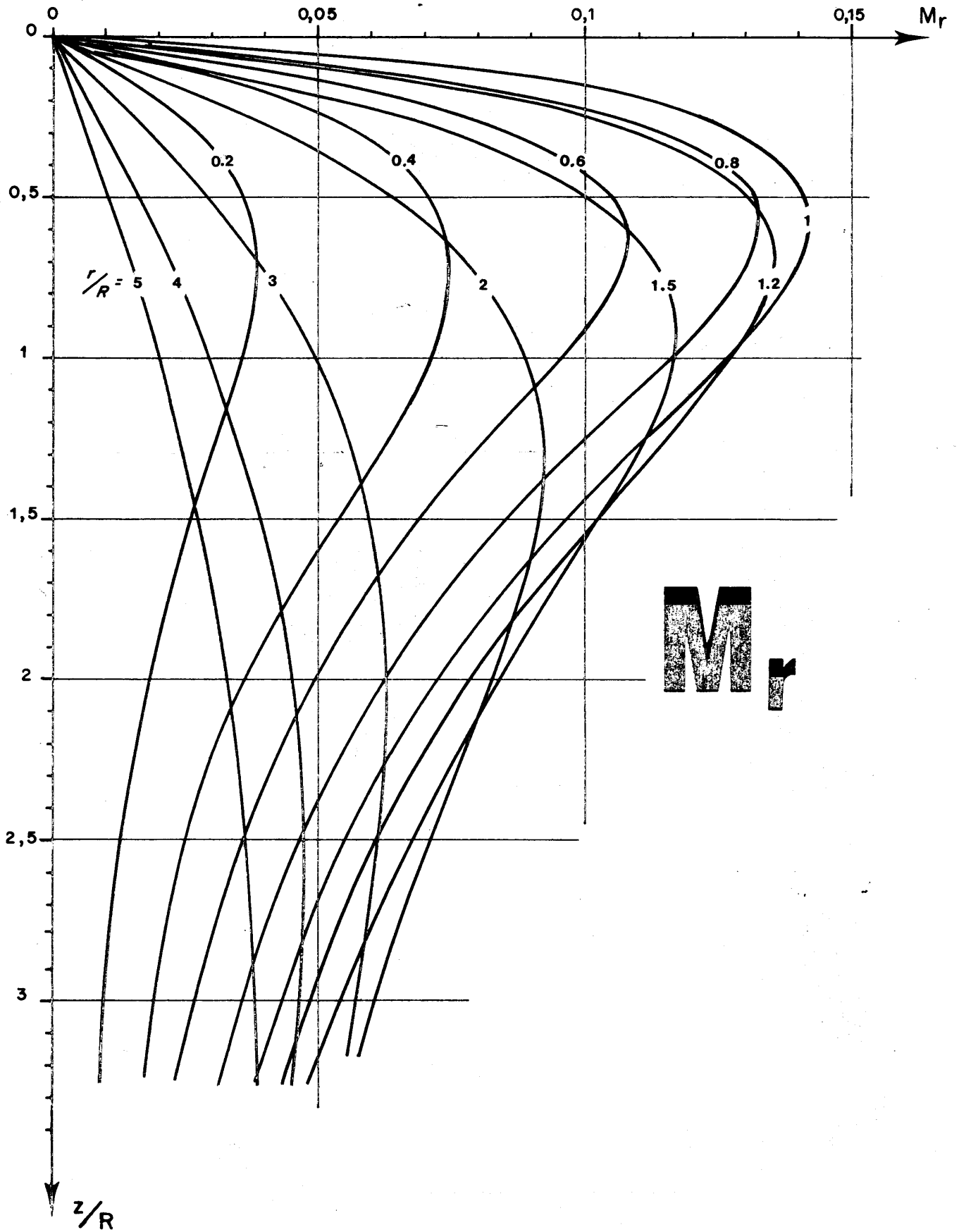
K z r		r/R																	
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0.1	0	0	0.003	0.008	0.020	0.067	0.318	0	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0	0.012	0.029	0.064	0.162	0.305	0.56	0.136	0.031	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0	0.023	0.055	0.111	0.215	0.292	0.182	0.057	0.013	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0	0.035	0.079	0.145	0.234	0.278	0.202	0.082	0.021	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0	0.044	0.096	0.164	0.237	0.262	0.207	0.102	0.030	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0	0.050	0.107	0.172	0.229	0.246	0.205	0.115	0.039	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0	0.055	0.113	0.171	0.218	0.229	0.198	0.124	0.047	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0	0.056	0.112	0.165	0.204	0.213	0.190	0.129	0.055	0.012	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0	0.055	0.109	0.156	0.189	0.197	0.179	0.129	0.060	0.014	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0	0.053	0.103	0.146	0.174	0.182	0.169	0.127	0.064	0.016	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0	0.046	0.088	0.123	0.146	0.154	0.148	0.120	0.070	0.021	0.007	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
1.5	0	0.035	0.067	0.093	0.111	0.119	0.118	0.105	0.071	0.026	0.010	0.005	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0	0.021	0.041	0.057	0.069	0.077	0.081	0.078	0.063	0.031	0.014	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.5	0	0.013	0.025	0.036	0.045	0.051	0.055	0.057	0.051	0.031	0.016	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
3	0	0.008	0.016	0.024	0.030	0.035	0.038	0.041	0.040	0.029	0.017	0.010	0.006	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
4	0	0.004	0.008	0.011	0.015	0.018	0.020	0.023	0.023	0.022	0.016	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
5	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010	0.011	0.013	0.016	0.016	0.014	0.011	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001
6	0	0.001	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.010	0.011	0.011	0.009	0.007	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001
7	0	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
8	0	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.005	0.005	0.005	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
9	0	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
10	0	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001

3-1

M_r	r/R																	
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	0.010	0.021	0.034	0.053	0.076	0.091	0.091	0.072	0.059	0.049	0.037	0.027	0.021	0.017	0.014	0.011	0.009
0.2	0	0.019	0.040	0.063	0.091	0.109	0.086	0.052	0.027	0.014	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000
0.3	0	0.027	0.056	0.084	0.114	0.127	0.109	0.072	0.040	0.017	0.010	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.000
0.4	0	0.032	0.065	0.098	0.126	0.137	0.123	0.088	0.051	0.023	0.013	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
0.5	0	0.036	0.071	0.105	0.131	0.141	0.131	0.100	0.061	0.028	0.016	0.010	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001
0.6	0	0.038	0.074	0.107	0.132	0.141	0.134	0.108	0.069	0.033	0.021	0.012	0.008	0.006	0.005	0.003	0.002	0.001
0.7	0	0.038	0.076	0.107	0.130	0.139	0.135	0.113	0.076	0.037	0.021	0.014	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002	0.002
0.8	0	0.038	0.073	0.104	0.126	0.135	0.133	0.116	0.081	0.042	0.024	0.016	0.011	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002
0.9	0	0.037	0.071	0.100	0.121	0.131	0.130	0.117	0.085	0.045	0.027	0.017	0.012	0.009	0.007	0.004	0.003	0.003
1	0	0.035	0.068	0.095	0.115	0.125	0.126	0.116	0.089	0.048	0.029	0.019	0.013	0.010	0.008	0.005	0.003	0.003
1.2	0	0.031	0.060	0.084	0.103	0.113	0.117	0.112	0.092	0.054	0.033	0.022	0.016	0.012	0.009	0.006	0.004	0.004
1.5	0	0.026	0.049	0.069	0.085	0.096	0.102	0.102	0.091	0.059	0.039	0.027	0.019	0.014	0.011	0.007	0.005	0.004
2	0	0.018	0.035	0.050	0.063	0.072	0.079	0.084	0.082	0.063	0.045	0.032	0.024	0.018	0.014	0.010	0.007	0.005
2.5	0	0.013	0.025	0.036	0.046	0.055	0.061	0.067	0.071	0.061	0.047	0.036	0.027	0.021	0.017	0.012	0.008	0.006
3	0	0.010	0.019	0.027	0.035	0.042	0.048	0.054	0.060	0.057	0.047	0.038	0.030	0.024	0.019	0.013	0.010	0.007
4	0	0.006	0.012	0.017	0.022	0.027	0.031	0.036	0.042	0.047	0.043	0.038	0.032	0.027	0.022	0.016	0.012	0.009
5	0	0.004	0.007	0.011	0.014	0.018	0.021	0.025	0.031	0.037	0.038	0.035	0.031	0.027	0.024	0.018	0.014	0.011
6	0	0.003	0.005	0.008	0.010	0.014	0.015	0.018	0.023	0.029	0.032	0.031	0.029	0.027	0.024	0.019	0.015	0.012
7	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010	0.011	0.014	0.018	0.024	0.026	0.027	0.027	0.025	0.023	0.019	0.016	0.013
8	0	0.002	0.003	0.005	0.006	0.008	0.009	0.011	0.015	0.019	0.022	0.024	0.024	0.023	0.022	0.019	0.016	0.013
9	0	0.001	0.002	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.012	0.016	0.019	0.021	0.021	0.021	0.021	0.019	0.016	0.014
10	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.010	0.014	0.016	0.018	0.019	0.019	0.019	0.018	0.016	0.014

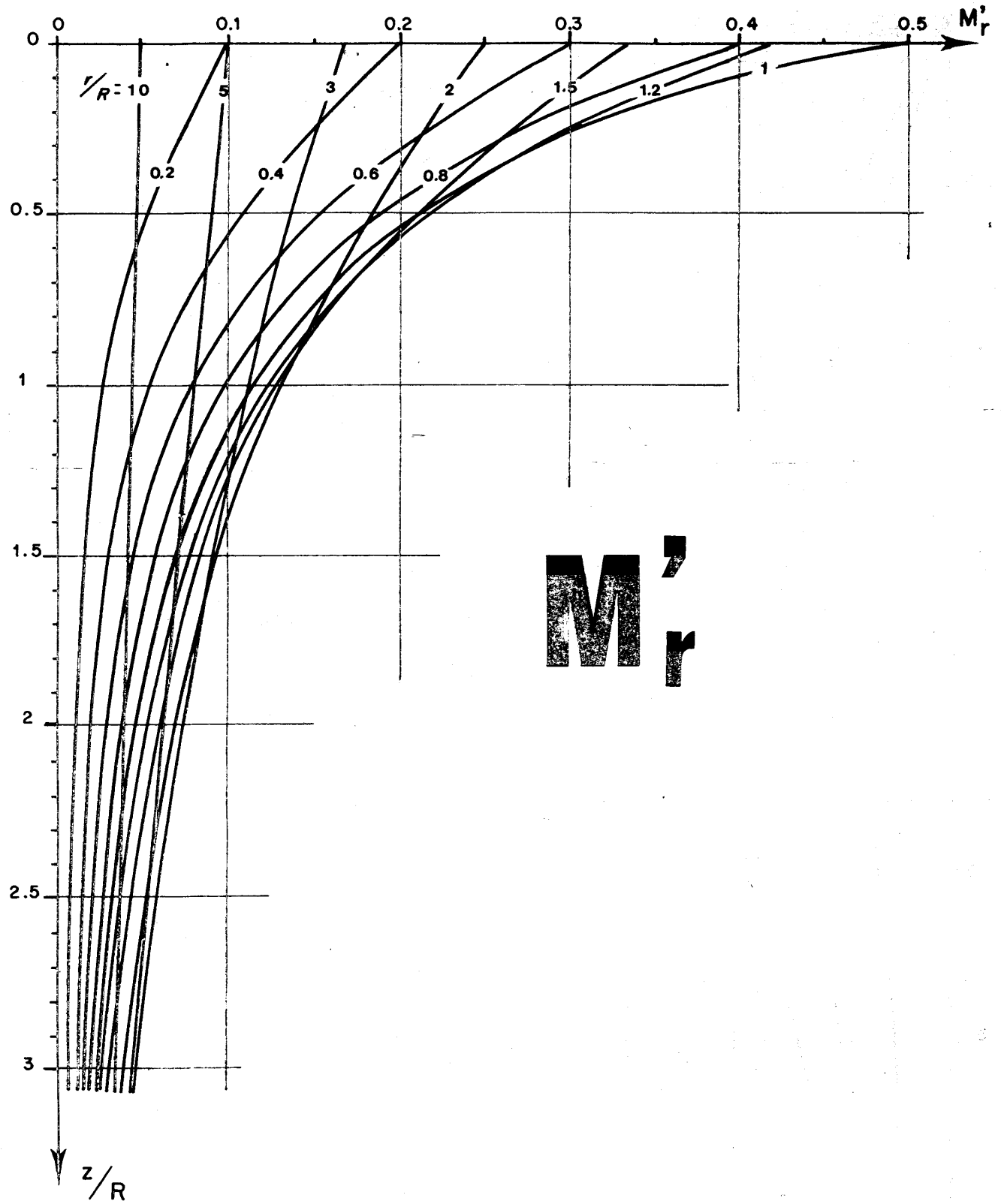
M_r

r/R



M_r

3-1



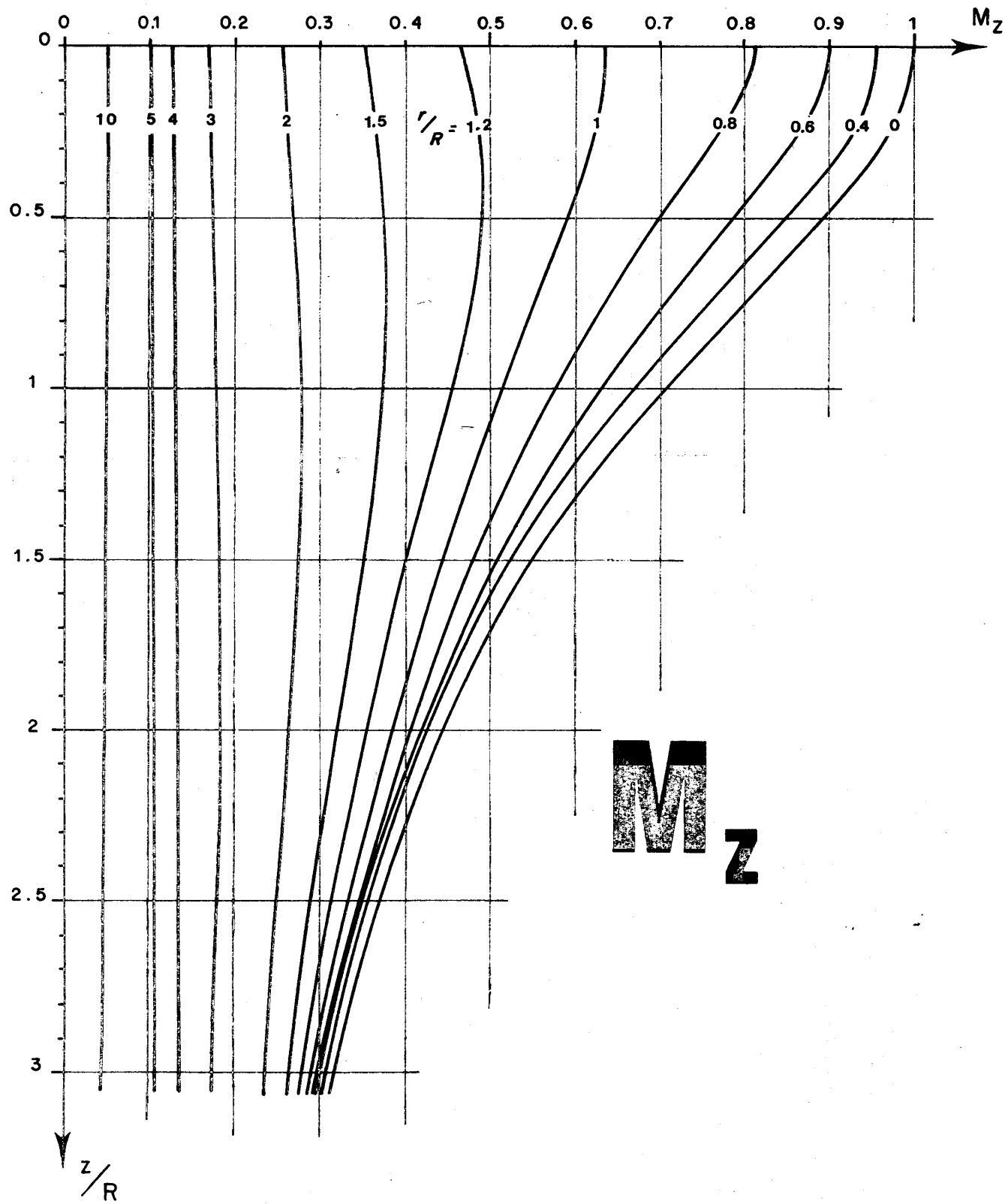
M'	r/R																	
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0	0	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.417	0.333	0.250	0.167	0.125	0.100	0.083	0.071	0.062	0.050	0.042	0.036
0.1	0	0.090	0.179	0.265	0.346	0.392	0.365	0.306	0.236	0.161	0.122	0.098	0.082	0.070	0.062	0.049	0.041	0.035
0.2	0	0.080	0.158	0.232	0.294	0.328	0.319	0.279	0.222	0.155	0.119	0.096	0.081	0.069	0.061	0.049	0.041	0.035
0.3	0	0.071	0.135	0.202	0.253	0.280	0.280	0.255	0.209	0.149	0.112	0.092	0.079	0.068	0.060	0.049	0.041	0.034
0.4	0	0.062	0.122	0.176	0.218	0.242	0.246	0.231	0.196	0.143	0.112	0.092	0.078	0.067	0.059	0.048	0.040	0.034
0.5	0	0.055	0.107	0.153	0.189	0.211	0.218	0.210	0.184	0.138	0.109	0.090	0.076	0.066	0.059	0.048	0.040	0.034
0.6	0	0.048	0.094	0.134	0.165	0.185	0.194	0.191	0.172	0.132	0.106	0.088	0.075	0.065	0.058	0.047	0.040	0.033
0.7	0	0.042	0.082	0.117	0.145	0.164	0.173	0.174	0.161	0.127	0.103	0.086	0.074	0.064	0.057	0.046	0.039	0.033
0.8	0	0.037	0.072	0.103	0.128	0.145	0.155	0.159	0.151	0.121	0.100	0.084	0.072	0.063	0.056	0.046	0.039	0.033
0.9	0	0.033	0.064	0.091	0.113	0.130	0.140	0.145	0.141	0.116	0.097	0.082	0.071	0.062	0.055	0.045	0.039	0.033
1	0	0.029	0.058	0.081	0.101	0.116	0.126	0.133	0.131	0.112	0.094	0.080	0.069	0.061	0.055	0.045	0.038	0.033
1.2	0	0.023	0.045	0.064	0.081	0.094	0.104	0.112	0.115	0.103	0.088	0.076	0.067	0.059	0.053	0.044	0.038	0.032
1.5	0	0.017	0.033	0.047	0.060	0.071	0.079	0.088	0.094	0.090	0.080	0.071	0.063	0.056	0.051	0.043	0.036	0.032
2	0	0.010	0.021	0.030	0.039	0.047	0.053	0.061	0.069	0.072	0.068	0.062	0.057	0.052	0.047	0.040	0.035	0.031
2.5	0	0.007	0.014	0.021	0.027	0.032	0.038	0.044	0.052	0.058	0.058	0.055	0.051	0.047	0.044	0.038	0.033	0.029
3	0	0.005	0.010	0.015	0.020	0.024	0.028	0.033	0.040	0.048	0.049	0.048	0.046	0.043	0.040	0.036	0.032	0.028
4	0	0.003	0.006	0.009	0.012	0.014	0.017	0.020	0.026	0.033	0.036	0.037	0.037	0.036	0.034	0.031	0.028	0.026
5	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.009	0.011	0.014	0.017	0.023	0.027	0.029	0.030	0.030	0.029	0.028	0.026	0.024
6	0	0.001	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.010	0.013	0.017	0.021	0.023	0.024	0.025	0.025	0.024	0.023	0.022
7	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.013	0.016	0.019	0.020	0.021	0.021	0.021	0.021	0.020
8	0	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.010	0.013	0.015	0.016	0.016	0.018	0.019	0.019	0.018
9	0	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.004	0.004	0.006	0.008	0.011	0.012	0.014	0.015	0.015	0.016	0.017	0.016
10	0	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.007	0.009	0.010	0.012	0.013	0.014	0.015	0.015	0.015

3-1

M Z		r/R																
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	1.000	0.990	0.959	0.903	0.813	0.637	0.468	0.356	0.258	0.169	0.126	0.100	0.083	0.072	0.063	0.050	0.042	0.035
0.1	0.995	0.985	0.953	0.896	0.803	0.634	0.473	0.357	0.259	0.169	0.126	0.100	0.083	0.072	0.063	0.050	0.042	0.035
0.2	0.981	0.970	0.937	0.877	0.779	0.627	0.481	0.361	0.260	0.170	0.126	0.100	0.083	0.072	0.063	0.050	0.042	0.035
0.3	0.958	0.947	0.910	0.850	0.752	0.617	0.488	0.366	0.262	0.170	0.127	0.100	0.083	0.072	0.063	0.050	0.042	0.035
0.4	0.928	0.917	0.882	0.819	0.725	0.605	0.490	0.370	0.264	0.171	0.127	0.101	0.083	0.072	0.062	0.050	0.042	0.035
0.5	0.894	0.883	0.847	0.786	0.699	0.592	0.490	0.374	0.268	0.171	0.127	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042	0.036
0.6	0.857	0.846	0.812	0.754	0.673	0.579	0.486	0.377	0.270	0.172	0.128	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042	0.036
0.7	0.820	0.808	0.775	0.703	0.648	0.552	0.481	0.379	0.272	0.173	0.128	0.102	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042	0.036
0.8	0.781	0.771	0.740	0.690	0.624	0.548	0.474	0.379	0.274	0.174	0.129	0.102	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042	0.036
0.9	0.743	0.733	0.705	0.662	0.604	0.532	0.465	0.378	0.276	0.175	0.129	0.102	0.085	0.072	0.063	0.050	0.042	0.036
1	0.707	0.713	0.672	0.631	0.578	0.518	0.457	0.375	0.278	0.176	0.130	0.102	0.085	0.072	0.063	0.050	0.042	0.036
1.2	0.640	0.633	0.612	0.579	0.536	0.487	0.438	0.368	0.278	0.179	0.130	0.104	0.085	0.072	0.063	0.050	0.042	0.036
1.5	0.555	0.549	0.524	0.510	0.480	0.444	0.406	0.353	0.276	0.182	0.132	0.103	0.086	0.073	0.063	0.050	0.042	0.035
2	0.447	0.440	0.426	0.421	0.403	0.381	0.358	0.322	0.265	0.183	0.135	0.106	0.087	0.074	0.065	0.051	0.042	0.036
2.5	0.372	0.369	0.364	0.355	0.344	0.330	0.315	0.290	0.250	0.182	0.137	0.107	0.089	0.075	0.065	0.052	0.043	0.036
3	0.316	0.315	0.312	0.306	0.298	0.290	0.279	0.262	0.232	0.176	0.137	0.109	0.090	0.076	0.065	0.053	0.042	0.036
4	0.242	0.242	0.240	0.238	0.234	0.211	0.224	0.216	0.199	0.164	0.132	0.109	0.090	0.077	0.067	0.053	0.043	0.037
5	0.196	0.196	0.195	0.193	0.191	0.189	0.185	0.180	0.171	0.147	0.125	0.106	0.090	0.078	0.068	0.054	0.044	0.037
6	0.165	0.163	0.163	0.162	0.161	0.160	0.158	0.155	0.149	0.133	0.117	0.102	0.089	0.077	0.068	0.054	0.044	0.038
7	0.141	0.141	0.141	0.140	0.139	0.138	0.137	0.135	0.131	0.120	0.108	0.096	0.085	0.076	0.067	0.055	0.045	0.038
8	0.124	0.124	0.123	0.123	0.122	0.122	0.121	0.120	0.117	0.109	0.100	0.091	0.082	0.074	0.066	0.054	0.046	0.039
9	0.110	0.110	0.110	0.110	0.109	0.109	0.108	0.107	0.105	0.100	0.093	0.086	0.078	0.071	0.064	0.054	0.045	0.039
10	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.098	0.097	0.096	0.092	0.087	0.080	0.075	0.068	0.063	0.053	0.045	0.039

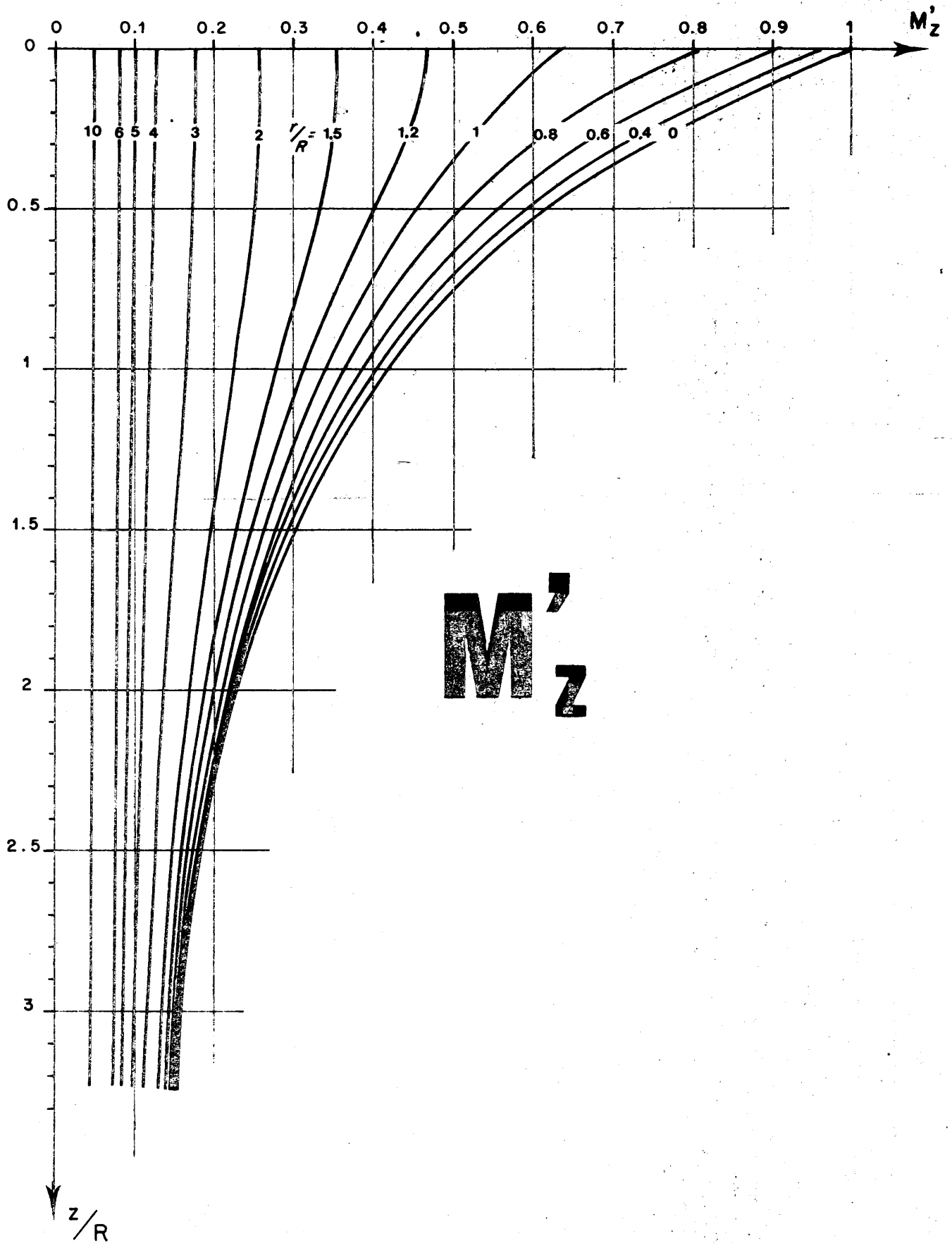
M Z

r/R



3-1

M
z



M'	r/R																	
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0	1.000	0.990	0.959	0.903	0.813	0.637	0.468	0.356	0.258	0.169	0.126	0.100	0.083	0.072	0.063	0.050	0.042	0.035
0.1	0.905	0.895	0.864	0.810	0.724	0.591	0.463	0.354	0.258	0.169	0.126	0.100	0.083	0.072	0.063	0.050	0.042	0.035
0.2	0.820	0.810	0.781	0.730	0.653	0.550	0.450	0.350	0.257	0.169	0.126	0.100	0.083	0.071	0.063	0.050	0.042	0.035
0.3	0.744	0.735	0.705	0.662	0.596	0.514	0.434	0.344	0.255	0.168	0.126	0.100	0.083	0.071	0.063	0.050	0.042	0.036
0.4	0.677	0.669	0.645	0.604	0.548	0.481	0.415	0.336	0.252	0.168	0.126	0.100	0.083	0.071	0.063	0.050	0.042	0.036
0.5	0.618	0.611	0.589	0.554	0.507	0.451	0.397	0.327	0.249	0.166	0.125	0.100	0.083	0.071	0.062	0.050	0.041	0.036
0.6	0.566	0.560	0.542	0.511	0.471	0.425	0.378	0.317	0.245	0.165	0.125	0.100	0.083	0.071	0.062	0.050	0.041	0.036
0.7	0.521	0.515	0.499	0.455	0.439	0.400	0.361	0.307	0.240	0.164	0.124	0.100	0.083	0.071	0.062	0.050	0.041	0.036
0.8	0.481	0.476	0.462	0.440	0.411	0.378	0.344	0.297	0.235	0.162	0.124	0.099	0.083	0.071	0.062	0.049	0.041	0.036
0.9	0.445	0.441	0.429	0.413	0.390	0.357	0.328	0.287	0.231	0.161	0.123	0.098	0.083	0.071	0.062	0.050	0.041	0.036
1	0.414	0.425	0.402	0.384	0.363	0.339	0.314	0.277	0.226	0.159	0.122	0.098	0.083	0.071	0.062	0.050	0.041	0.036
1.2	0.362	0.359	0.352	0.340	0.324	0.306	0.287	0.258	0.215	0.156	0.120	0.098	0.082	0.070	0.062	0.049	0.041	0.035
1.5	0.303	0.301	0.286	0.288	0.278	0.266	0.252	0.232	0.199	0.150	0.117	0.095	0.081	0.070	0.061	0.049	0.041	0.035
2	0.236	0.235	0.223	0.228	0.223	0.216	0.209	0.196	0.175	0.139	0.112	0.093	0.079	0.069	0.061	0.049	0.041	0.035
2.5	0.193	0.192	0.190	0.188	0.185	0.181	0.176	0.168	0.155	0.128	0.106	0.089	0.077	0.067	0.060	0.049	0.041	0.035
3	0.162	0.162	0.161	0.159	0.157	0.155	0.152	0.147	0.137	0.117	0.100	0.086	0.075	0.066	0.058	0.048	0.040	0.034
4	0.123	0.123	0.124	0.126	0.121	0.120	0.118	0.116	0.111	0.100	0.088	0.078	0.069	0.062	0.056	0.047	0.039	0.034
5	0.099	0.099	0.098	0.098	0.098	0.097	0.096	0.095	0.092	0.085	0.078	0.071	0.064	0.058	0.053	0.045	0.038	0.033
6	0.083	0.083	0.082	0.082	0.082	0.082	0.081	0.080	0.079	0.074	0.069	0.064	0.059	0.054	0.050	0.043	0.037	0.033
7	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.070	0.070	0.069	0.068	0.065	0.062	0.058	0.054	0.051	0.047	0.041	0.036	0.032
8	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062	0.061	0.061	0.058	0.056	0.053	0.050	0.047	0.044	0.039	0.035	0.031
9	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.054	0.053	0.051	0.049	0.046	0.044	0.041	0.037	0.033	0.030
10	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.049	0.048	0.047	0.045	0.042	0.041	0.039	0.035	0.032	0.030

3-1

N	r/R																	
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0.1	0	0.049	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.094	0.051	0.059	0.077	0.121	-0.022	-0.120	-0.045	-0.015	-0.004	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
0.3	0.132	0.135	0.144	0.150	0.130	-0.020	-0.134	-0.098	-0.041	-0.011	-0.005	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000
0.4	0.160	0.162	0.165	0.160	0.112	-0.013	-0.110	-0.104	-0.050	-0.015	-0.006	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000	0.000
0.5	0.179	0.178	0.175	0.156	0.098	-0.005	-0.087	-0.101	-0.057	-0.018	-0.008	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001	0.000	0.000	-0.000
0.6	0.189	0.187	0.173	0.149	0.090	0.003	-0.067	-0.093	-0.061	-0.021	-0.009	-0.005	-0.003	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000
0.7	0.192	0.188	0.174	0.141	0.084	0.001	-0.050	-0.082	-0.061	-0.024	-0.010	-0.005	-0.003	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000
0.8	0.190	0.185	0.168	0.134	0.081	0.017	-0.036	-0.071	-0.058	-0.025	-0.011	-0.006	-0.003	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000
0.9	0.185	0.178	0.160	0.127	0.078	0.023	-0.023	-0.060	-0.054	-0.026	-0.012	-0.007	-0.004	-0.002	-0.002	-0.001	-0.000	-0.000
1	0.177	0.171	0.152	0.120	0.076	0.028	-0.013	-0.049	-0.051	-0.027	-0.013	-0.007	-0.004	-0.002	-0.002	-0.001	0.001	-0.000
1.2	0.157	0.151	0.135	0.108	0.073	0.035	0.002	-0.031	-0.041	-0.028	-0.014	-0.008	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000
1.5	0.128	0.123	0.111	0.091	0.067	0.041	0.017	-0.011	-0.031	-0.026	-0.015	-0.009	-0.005	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000
2	0.089	0.085	0.080	0.069	0.055	0.041	0.027	0.008	-0.010	-0.020	-0.015	-0.010	-0.006	-0.004	-0.003	-0.001	-0.001	-0.000
2.5	0.064	0.061	0.058	0.053	0.045	0.036	0.028	0.015	-0.001	-0.013	-0.013	-0.009	-0.007	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001
3	0.047	0.046	0.043	0.041	0.036	0.031	0.025	0.017	0.005	-0.007	-0.010	-0.008	-0.006	-0.005	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001
4	0.029	0.027	0.026	0.026	0.024	0.021	0.019	0.016	0.009	0.000	0.003	0.003	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
5	0.019	0.018	0.018	0.017	0.017	0.006	0.014	0.012	0.009	0.003	0.001	-0.001	-0.004	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001
6	0.013	0.013	0.013	0.013	0.012	0.011	0.011	0.010	0.008	0.004	0.001	-0.001	-0.002	-0.003	-0.002	-0.002	-0.001	-0.001
7	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.008	0.008	0.007	0.004	0.002	0.000	-0.001	-0.002	-0.002	-0.002	-0.001	-0.001
8	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.005	0.004	0.002	0.001	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
9	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.004	0.004	0.002	0.001	0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
10	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001

N

r/R

N		r/R																	
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.049	0.050	0.052	0.057	0.067	0.076	0.041	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.094	0.096	0.099	0.105	0.114	0.109	0.071	0.034	0.014	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.132	0.133	0.141	0.141	0.143	0.127	0.091	0.048	0.020	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.160	0.161	0.162	0.163	0.158	0.137	0.102	0.059	0.025	0.008	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.179	0.179	0.178	0.175	0.164	0.141	0.109	0.067	0.030	0.009	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0.189	0.189	0.186	0.179	0.165	0.141	0.112	0.072	0.035	0.011	0.005	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0.192	0.191	0.187	0.178	0.162	0.139	0.112	0.076	0.038	0.012	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0.190	0.189	0.183	0.173	0.157	0.135	0.111	0.077	0.041	0.014	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.185	0.183	0.177	0.166	0.151	0.131	0.109	0.078	0.043	0.015	0.007	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.177	0.175	0.169	0.158	0.143	0.125	0.105	0.078	0.045	0.016	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.157	0.156	0.150	0.141	0.128	0.113	0.098	0.075	0.046	0.018	0.008	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
1.5	0.128	0.128	0.122	0.115	0.107	0.096	0.085	0.068	0.045	0.020	0.010	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.090	0.090	0.087	0.083	0.078	0.072	0.066	0.056	0.041	0.021	0.011	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
2.5	0.065	0.065	0.063	0.061	0.058	0.055	0.051	0.045	0.035	0.020	0.012	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
3	0.048	0.048	0.048	0.045	0.044	0.042	0.040	0.036	0.030	0.019	0.012	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
4	0.029	0.029	0.029	0.028	0.027	0.027	0.026	0.024	0.021	0.016	0.011	0.008	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
5	0.019	0.019	0.019	0.018	0.018	0.018	0.017	0.016	0.015	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
6	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.011	0.010	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
7	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.005	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
8	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.006	0.005	0.003	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
9	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
10	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001

3-1

N Z		r/R																
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0.1	0	-0.098	-0.101	-0.111	-0.134	-0.187	0	0	0.026	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	-0.188	-0.193	-0.207	-0.235	-0.259	-0.085	0.079	0.044	0.015	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	-0.263	-0.267	-0.280	-0.294	-0.272	-0.107	0.043	0.050	0.021	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	-0.320	-0.322	-0.327	-0.322	-0.269	-0.124	0.007	0.045	0.025	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	-0.357	-0.357	-0.353	-0.331	-0.262	-0.135	-0.021	0.034	0.026	0.009	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	-0.378	-0.375	-0.363	-0.328	-0.254	-0.144	-0.044	0.021	0.025	0.010	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	-0.384	-0.379	-0.360	-0.319	-0.246	-0.149	-0.062	0.007	0.023	0.011	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	-0.380	-0.374	-0.351	-0.306	-0.237	-0.152	-0.075	0.006	0.017	0.011	0.005	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	-0.369	-0.362	-0.337	-0.292	-0.228	-0.154	-0.085	0.017	0.012	0.011	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1	-0.353	-0.345	-0.320	-0.278	-0.219	-0.153	-0.092	0.010	0.010	0.011	0.006	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	-0.314	-0.307	-0.284	-0.248	-0.201	-0.149	-0.100	0.043	0.000	0.009	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
1.5	-0.256	-0.250	-0.233	-0.206	-0.173	-0.137	-0.101	0.057	0.013	0.006	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	-0.178	-0.181	-0.166	-0.151	-0.133	-0.113	-0.092	0.063	0.028	0.000	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
2.5	-0.128	-0.126	-0.121	-0.113	-0.102	-0.091	-0.078	0.060	0.034	0.006	0.001	0.002	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
3	-0.094	-0.093	-0.091	-0.086	-0.080	-0.073	-0.065	0.053	0.035	0.011	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
4	-0.057	-0.056	-0.055	-0.053	-0.051	-0.047	-0.045	0.039	0.030	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	-0.037	-0.037	-0.036	-0.035	-0.034	-0.033	-0.031	0.029	0.024	0.015	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	-0.026	-0.026	-0.026	-0.025	-0.025	-0.024	-0.023	0.022	0.019	0.013	0.008	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
7	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.018	-0.018	-0.018	0.017	0.015	0.012	0.008	0.005	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
8	-0.015	-0.015	-0.015	-0.015	-0.014	-0.014	-0.014	0.013	0.012	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
9	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.011	-0.011	-0.011	0.011	0.010	0.008	0.006	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
10	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000

N Z

N Z

N'		r/R																	
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.900	0.897	0.886	0.861	0.787	0.430	0.027	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.803	0.798	0.778	0.734	0.630	0.382	0.154	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.712	0.705	0.683	0.626	0.520	0.343	0.179	0.024	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.628	0.620	0.592	0.537	0.443	0.310	0.187	0.031	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.552	0.544	0.516	0.464	0.383	0.281	0.185	0.037	0.010	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0.485	0.476	0.450	0.404	0.336	0.255	0.179	0.042	0.012	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0.426	0.418	0.394	0.354	0.298	0.217	0.171	0.045	0.014	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0.375	0.368	0.347	0.312	0.265	0.212	0.162	0.048	0.015	0.006	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.331	0.324	0.306	0.277	0.238	0.194	0.152	0.050	0.016	0.007	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.292	0.287	0.270	0.246	0.214	0.178	0.143	0.051	0.017	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.231	0.227	0.216	0.198	0.176	0.151	0.125	0.052	0.019	0.008	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	0.167	0.165	0.158	0.148	0.134	0.118	0.102	0.051	0.021	0.010	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.105	0.104	0.101	0.096	0.090	0.082	0.074	0.044	0.022	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.071	0.070	0.069	0.066	0.063	0.059	0.055	0.037	0.021	0.012	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.051	0.051	0.050	0.048	0.047	0.044	0.042	0.031	0.019	0.012	0.007	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.029	0.029	0.029	0.028	0.028	0.027	0.026	0.021	0.015	0.011	0.007	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.019	0.019	0.019	0.018	0.018	0.018	0.018	0.015	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.012	0.011	0.009	0.007	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.005	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001
9	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001
10	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001

3-1

EXPRESSION DES COEFFICIENTS

Les coefficients K , M et N donnant les contraintes, déplacements et déformations dûs à une charge circulaire uniforme obéissent aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} K_r &= N'_z - N_r & N_r + N_\theta + N_z &= 0 \\ K_\theta &= N'_z - N_\theta & K_r + K_\theta + K_z &= 3 N'_z \\ K_z &= N'_z - N_z & N'_z &= K'_r + K'_\theta \end{aligned}$$

$$M_r = \frac{r}{R} N_\theta$$

$$M'_r = \frac{r}{R} K'_r$$

$$M_z = \frac{z}{R} N'_z + M'_z$$

Les expressions de ces coefficients ne sont pas explicites, sauf en quelques lieux particuliers :

- sur l'axe de cercle ($r = 0$) :

$$K_r = K_\theta = 1 - \frac{3z}{2\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{z^3}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$K'_r = K'_\theta = \frac{1}{2} - \frac{z}{2\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$K_z = 1 - \frac{z^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$K_{zr} = M_r = M'_r = 0$$

$$M_z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad M'_z = \frac{\sqrt{R^2 + z^2} - z}{R}$$

$$N_r = N_\theta = \frac{z}{2\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z^3}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$N_z = \frac{z^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$N'_z = 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

— sur la surface du sol ($z = 0$) :

Les divers coefficients ont pour valeur 1, 0,5 , $1/\pi$ ou 0, sauf :

$$M'_r = \begin{cases} \frac{r}{2R} & \text{si } r < R \\ \frac{R}{2r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$M_z = M'_z = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^4 - \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} \right] \dots \quad (\text{si } r < R)$$

$$M_z = M'_z = \frac{R}{2r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^4 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} \right] \dots \quad (\text{si } R < r)$$

BIBLIOGRAPHIE

L'étude fondamentale de ce problème a été faite par Boussinesq [2], Terazawa [6] et Love [5]. Les tables données ici ont été dressées à partir de calculs faits à Grenoble et des résultats obtenus par l'U.S. Army Waterways Experiment Station [1, 3, 4, 7] en modifiant le choix des coefficients de manière à faciliter au maximum le travail de l'ingénieur.

REFERENCES

- [1] P.G. AHLVIN and H.H. ULERY, "Tabulated Values for Determining the Complete Pattern of Stresses, Strains and Deflections Beneath a Uniform Circular Load on a Homogeneous Half Space", Highway Research Board Bulletin, 342 (1962), 1-13.
- [2] J. BOUSSINESQ, "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques", Gauthier-Villars (Paris, 1885), p. 141.
- [3] S.M. FERGUS and W.E. MINER, "Distributed Loads on Elastic Foundations : The Uniform Circular Load", Highway Research Board Proc., 34 (1955), 582-597.
- [4] C.R. FOSTER and R.G. AHLVIN, "Stresses and Deflections Induced by a Uniform Circular Load", Highway Research Board Proc., 33 (1954), 467-470.
- [5] A.E.H. LOVE, "The Stresses Produced in a semi-Infinite Body by Pressure on Part of the boundary", Phil Trans. Royal Soc., Série A, Vol. 228 (1929), 377-420.
- [6] K. TERAZAWA, "On the Elastic Equilibrium of a Semi-Infinite Solid under Given Boundary Conditions with Some Applications", Journal of the College of Science, Vol. 37, 7 (Tokyo, 1916), 1-64.
- [7] U.S. Army Waterways Experiment Station, "Investigations of Pressures and Deflections for Flexible Pavements", "Tech. Memo 3-323, Report 3 and 4 (Vicksburg, Miss. Septembre 1953, Décembre 1954).

Ouvrages donnant quelques formules ou valeurs numériques :

- A. CAQUOT et KERISEL, "Traité de Mécanique des Sols", Gauthier-Villars, 3^e éd. (Paris, 1956), p. 141.

- R.E. FADUM, "Influence values for estimating stresses in elastic foundations", Proc. 2^e I.C.S.M.F.E., 3, Ig 9 (Rotterdam, 1948), 77-84.
- V.A. FLORIN, "Osnovi Mekaniki Gruntov", Tome 1 (Moscou, 1959), p. 132.
- H. GRAY, "Stress Distribution in Elastic Solids", Proc. 1^{er} I.C.S.M.F.E., 2, E 10 (Cambridge, 1936), 157-168.
- M.E. HARR, "Foundations of theoretical soil mechanics", Mc. Graw Hill (New York, 1966), p. 86.
- Highway Research Bord, "Theoretical Analysis of Structural Behaviour of Road Test Flexible Pavements", National Cooperative Highway Research Program Report N° 12 (Washington 1964), p. 25.
- L. JURGENSON, "The Application of Theories of Elasticity and Plasticity to Foundation Problems", Contributions to Soil Mechanics 1925-1940, Boston Society of Civil Engineers (Boston, 1940), p. 173-177.
- A. KEZDI, "Bodenmechanik", Band 2, Verlag für Bauwesen (Berlin, 1964), p. 193.
- A.L. LITTLE, "Foundations", Arnold (London, 1961), p. 56, 58, 61.
- A.I. LUR'E, "Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity", Inter-science Pub. (New York, 1964), p. 108.
- NAVDOCKS, "Design Manual-Soil Mechanics, Foundations and Earth Structures", Navdocks DM-7, Department of the Navy, Bureau of Yards and Docks (1962), p. 5-6.
- N.M. NEWMARK, "Influence Charts for Computation of Vertical Displacements in Elastic Foundations", University of Illinois, Engineering Experiment Station, Bulletin N° 367 (Urbana, 1947), p. 10.

**FONDATION CIRCULAIRE EXERÇANT
UNE CHARGE NORMALE UNIFORME**

(Réservoir, Radier souple)
sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul du tassement.
- Calcul du tassement moyen.
- Calcul des contraintes.
- Tables et graphiques.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol constitue une couche homogène d'épaisseur H reposant sur un substratum indéformable auquel elle adhère parfaitement.

DEFINITION DE LA CHARGE

La charge est constituée par une pression uniforme p exercée sur un cercle de rayon R à la surface du sol (Fig. 1). Cette charge est à peu près celle d'un *grand radier souple* ou d'un *réservoir métallique contenant un liquide*.

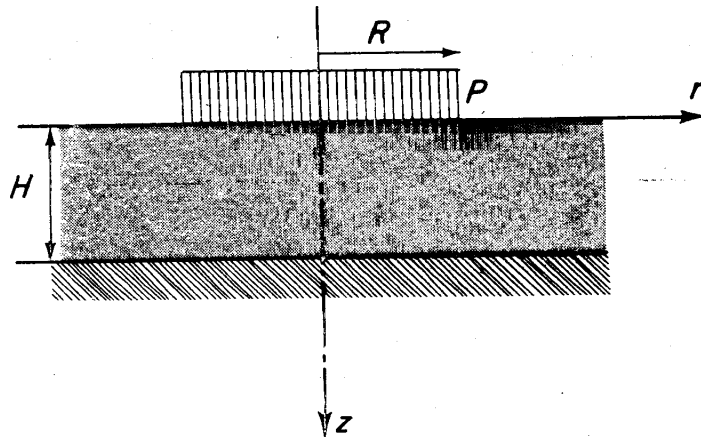


FIG. 1. — Définition du sol et de la charge.

CALCUL DU TASSEMENT

Le tassement d'un point quelconque de la surface du sol s'exprime indifféremment par l'une des deux formules :

$$(1) \quad w = \frac{pR}{E} M_H$$

$$(2) \quad w = \frac{pH}{E} M'_H$$

avec :

- w : tassement du point situé à la distance r du centre du cercle,
- p : contrainte normale uniformément répartie sur le cercle,
- R : rayon de la fondation circulaire,
- E : module d'Young du sol,

M_H : coefficient sans dimensions donné dans les tables en fonction de v , H/R et r/R (pour $r = 0$ voir également le graphique),

M'_H : coefficient sans dimensions donné dans les tables en fonction de v , R/H et r/R (pour $r = 0$ voir également le graphique),

v : coefficient de Poisson du sol

H : épaisseur de la couche de sol.

Bien qu'elles soient équivalentes, nous avons donné deux formules, car :

— la première est plus commode si H/R est grand ou si l'on veut comparer deux fondations de même rayon sur des couches différentes,

— la seconde est plus commode si R/H est grand si l'on veut comparer deux fondations différentes reposant sur une même couche.

Exemple 1 :

Considérons un réservoir métallique de 20 m (66 ft) de diamètre, et 14 m (46 ft) de haut, plein de fuel lourd de poids volumique $0,95 \text{ g/cm}^3$ ($59,5 \text{ lb/cu.ft}$) reposant sur une couche de 11 m (36 ft) de sol supportée par un substratum indéformable. Les propriétés de ce sol sont : $E = 32 \text{ bars}$ ($67\,000 \text{ lb/sq.ft}$) et $v = 0,3$. Quel est le tassement au centre et au bord de ce réservoir sachant que le poids des tôles est tout à fait négligeable vis-à-vis de celui du fuel ?

Calculons d'abord la pression exercée sur le sol :

$$p = \rho gh = 950 \times 9,81 \times 14 = 131\,000 \text{ pascals} = 1,31 \text{ bar}$$

$$= 59,5 \times 46 = 2\,740 \text{ lb/sq.ft.}$$

Le tassement se calcule alors indifféremment par la première formule avec $H/R = 1,1$ ou la seconde avec $R/H = 0,9$.

Au centre :

$$w = \frac{1,31 \times 10}{32} \times 0,866 = 0,35 \text{ m.}$$

$$w = \frac{2\,740 \times 33}{67\,000} \times 0,866 = 1,16 \text{ ft}$$

Au bord :

$$w = \frac{1,31 \times 10}{32} \times 0,386 = 0,16 \text{ m}$$

$$w = \frac{2\,740 \times 33}{67\,000} \times 0,386 = 0,52 \text{ ft}$$

$$w = \frac{1,31 \times 11}{32} \times 0,784 = 0,35 \text{ m.}$$

$$w = \frac{2\,740 \times 36}{67\,000} \times 0,784 = 1,16 \text{ ft.}$$

$$w = \frac{1,31 \times 11}{32} \times 0,350 = 0,16 \text{ m}$$

$$w = \frac{2\,740 \times 36}{67\,000} \times 0,350 = 0,52 \text{ ft.}$$

Si la vidange du réservoir est prévue par le bord, on voit qu'il faudra construire le fond du réservoir fortement convexe pour que la cote du centre reste supérieure après tassement.

CALCUL DU TASSEMENT MOYEN

La moyenne du tassement de tous les points de l'aire circulaire uniformément chargée s'écrit :

$$(3) \quad w_m = \frac{N}{\pi R^2} \frac{R}{E} M_{Hm}$$

ou bien :

$$(4) \quad w_m = \frac{N}{\pi R^2} \frac{H}{E} M'_{Hm},$$

avec :

- w_m : "tassement moyen",
- N : force normale centrée exercée par la fondation sur le sol
(charge supportée par la fondation + poids de la fondation),
- R : rayon de la fondation,
- H : épaisseur de la couche du sol,
- E, ν : module d'Young et coefficient de Poisson du sol,
- M_{Hm} et M'_{Hm} : coefficients sans dimensions donnés par les tableaux.

Notons que l'on peut utiliser indifféremment l'une ou l'autre formule (voir la remarque faite plus haut, à propos du calcul du tassement).

On montre que le "tassement moyen" est très voisin du tassement qu'aurait, sur le même sol, une fondation rigide de même diamètre et supportant la même charge.

Exemple 2 :

Quel est le tassement d'une cheminée de 350 tonnes (770 000 lb) reposant sur un radier rigide de 7 m (23 ft) de diamètre fondé sur une couche de 5 m (16,5 ft) d'épaisseur supportée par un substratum indéformable ? Le sol de la couche a pour module d'Young $E = 56$ bars (117 000 lb/sq.ft) et pour coefficient de Poisson, $\nu = 0,2$.

Le radier étant rigide, une excellente approximation de son tassement sera fournie par le "tassement moyen" :

$$\text{pour } R/H = 0,7 \quad \text{on a} \quad M'_{Hm} = 0,65 ,$$

$$\text{ou pour } H/R = 1,4 \quad \text{on a} \quad M_{Hm} = 0,91 .$$

D'où :

$$w = \frac{350 \times 9\,810}{\pi \times (3,5)^2} \times \frac{3,5}{56 \times 10^5} \times 0,91 = 0,05 \text{ m} ,$$

$$w = \frac{770\,000}{\pi \times (11,5)^2} \times \frac{11,5}{117\,000} \times 0,91 = 0,17 \text{ ft} = 2 \text{ in} ;$$

ou bien :

$$w = \frac{350 \times 9\,810}{\pi \times (3,5)^2} \times \frac{5}{56 \times 10^5} \times 0,65 = 0,05 \text{ m} ,$$

$$w = \frac{770\,000}{\pi \times (11,5)^2} \times \frac{16,5}{117\,000} \times 0,65 = 0,17 \text{ ft} = 2 \text{ in} .$$

CALCUL DES CONTRAINTES

Les contraintes en tout point de la couche de sol sont données par :

$$(5) \quad \sigma_z = pK_{Hz}$$

$$(6) \quad \tau_{zr} = pK_{H zr}$$

$$(7) \quad \sigma_r = pK_{Hr}$$

avec :

K_{Hz} , $K_{H zr}$ et K_{Hr} : coefficients sans dimensions donnés dans des tables en fonction de ν , H/R , z/H et r/R ,

ν : coefficient de Poisson du sol,

H : épaisseur de la couche de sol,

R : rayon de la fondation,

r : distance à l'axe de la fondation du point où l'on calcule les contraintes,

z : profondeur du point où l'on calcule les contraintes.

Exemple 3 :

Considérons un réservoir de pétrole de 10 m (33 ft) de rayon exerçant une pression uniforme de 1,31 bar (2 740 lb/sq.ft) sur une couche de sol d'épaisseur 10 m (33 ft) et de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

Quelle est la contrainte σ_z à 5,5 m (18 ft) de profondeur à la verticale du bord du réservoir ?

Pour $\nu = 0,3$, $H/R = 1$, $z/H = 0,55$, on lit dans les tables : $K_{Hz} = 0,437$.

D'où :

$$\sigma_z = 0,437 \times 1,31 = 0,57 \text{ bar} = 0,437 \times 2\,740 = 1\,200 \text{ lb/sq.ft} .$$

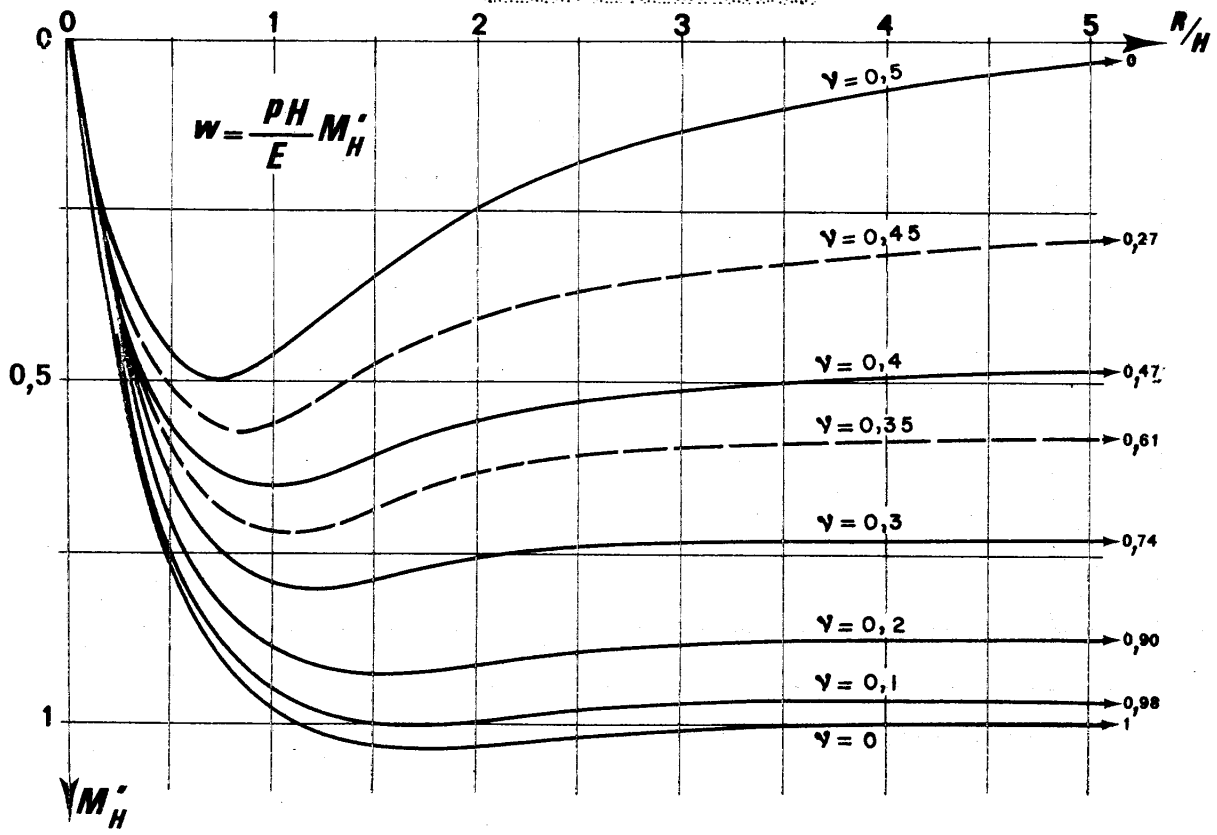
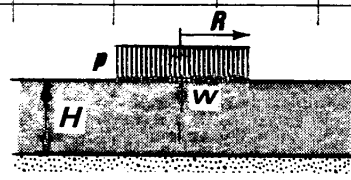
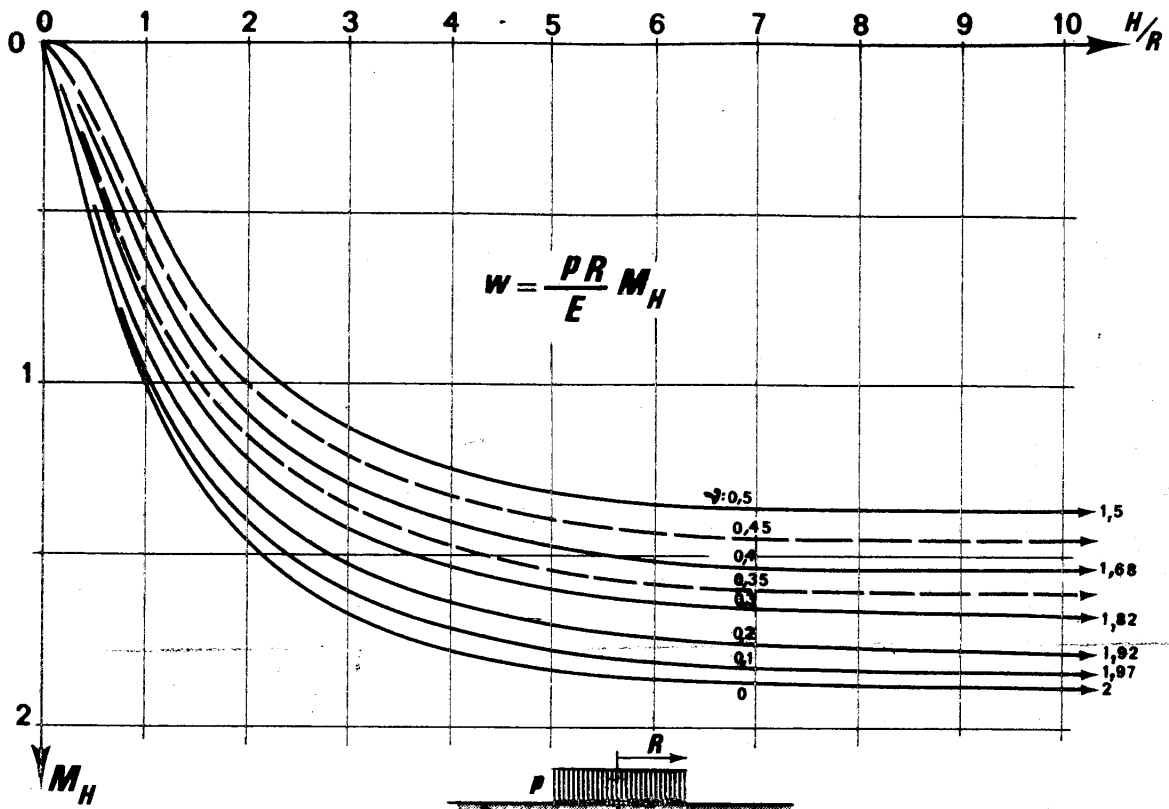
TABLES ET GRAPHIQUES- Calcul du tassement

Graphique et tables de M_H et M'_H : pp. 221 à 231.

Tables de M_{Hm} et M'_{Hm} : pp. 232 et 233.

- Calcul des contraintes

Tables de K_{Hr} , K_{Hz} et $K_{H zr}$: pp. 234 à 236.



3-2



r/R

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.101	0.101	0.101	0.049	-0.000	-0.001	-0.000	-0.000	0.000	0.000
0.2	0.200	0.201	0.201	0.201	0.202	0.202	0.203	0.203	0.202	0.187	0.097	0.012	-0.000	-0.002	-0.001	0.000	0.000
0.3	0.306	0.307	0.307	0.307	0.308	0.308	0.308	0.306	0.292	0.258	0.144	0.038	0.008	0.001	-0.000	0.000	0.000
0.4	0.408	0.409	0.410	0.410	0.410	0.406	0.396	0.396	0.373	0.325	0.191	0.066	0.024	0.007	-0.000	-0.001	-0.001
0.5	0.514	0.516	0.516	0.515	0.513	0.509	0.499	0.481	0.447	0.385	0.237	0.099	0.046	0.019	0.006	0.001	-0.002
0.6	0.620	0.621	0.620	0.616	0.611	0.604	0.589	0.564	0.514	0.440	0.281	0.132	0.072	0.036	0.016	0.007	-0.002
0.7	0.720	0.722	0.718	0.712	0.703	0.692	0.666	0.630	0.576	0.492	0.324	0.168	0.096	0.056	0.030	0.016	-0.001
0.8	0.816	0.817	0.812	0.804	0.785	0.768	0.736	0.694	0.634	0.544	0.366	0.202	0.124	0.078	0.045	0.028	0.000
0.9	0.898	0.898	0.892	0.881	0.852	0.840	0.802	0.755	0.688	0.590	0.406	0.236	0.158	0.160	0.064	0.041	0.001
1	0.976	0.976	0.969	0.955	0.934	0.905	0.866	0.812	0.740	0.638	0.446	0.271	0.181	0.123	0.083	0.056	0.003
1.1	1.046	1.046	1.037	1.022	0.992	0.962	0.922	0.864	0.786	0.682	0.484	0.304	0.210	0.148	0.106	0.074	0.009
1.2	1.110	1.107	1.097	1.080	1.056	1.016	0.974	0.910	0.830	0.720	0.519	0.336	0.238	0.172	0.126	0.090	0.016
1.3	1.166	1.163	1.152	1.133	1.106	1.066	1.020	0.955	0.870	0.756	0.552	0.366	0.264	0.196	0.146	0.108	0.022
1.4	1.218	1.214	1.202	1.182	1.152	1.110	1.062	0.996	0.910	0.792	0.583	0.396	0.290	0.219	0.166	0.126	0.030
1.5	1.261	1.257	1.245	1.224	1.194	1.148	1.100	1.032	0.944	0.826	0.612	0.423	0.316	0.241	0.186	0.144	0.038
1.6	1.301	1.297	1.285	1.264	1.230	1.188	1.134	1.066	0.976	0.856	0.640	0.450	0.339	0.262	0.205	0.162	0.044
1.7	1.339	1.335	1.322	1.301	1.264	1.224	1.166	1.098	1.006	0.883	0.668	0.474	0.360	0.283	0.224	0.180	0.056
1.8	1.372	1.368	1.355	1.334	1.298	1.256	1.196	1.125	1.032	0.908	0.690	0.496	0.382	0.303	0.244	0.196	0.066
1.9	1.403	1.399	1.385	1.363	1.328	1.284	1.226	1.152	1.057	0.932	0.712	0.518	0.402	0.322	0.262	0.211	0.076
2	1.428	1.424	1.410	1.388	1.354	1.308	1.250	1.176	1.082	0.956	0.734	0.538	0.422	0.340	0.278	0.228	0.086
2.2	1.480	1.475	1.461	1.438	1.400	1.354	1.296	1.222	1.126	0.996	0.772	0.576	0.457	0.376	0.310	0.256	0.106
2.4	1.519	1.514	1.500	1.476	1.440	1.392	1.334	1.260	1.162	1.032	0.806	0.608	0.490	0.405	0.338	0.284	0.126
2.5	1.538	1.533	1.518	1.493	1.458	1.410	1.350	1.275	1.178	1.048	0.820	0.623	0.505	0.418	0.350	0.295	0.135
3	1.613	1.608	1.593	1.567	1.528	1.480	1.424	1.344	1.246	1.114	0.880	0.684	0.562	0.476	0.406	0.352	0.176
3.5	1.667	1.662	1.647	1.623	1.582	1.536	1.477	1.397	1.300	1.166	0.928	0.732	0.610	0.521	0.452	0.395	0.212
4	1.707	1.702	1.687	1.665	1.624	1.580	1.518	1.438	1.341	1.208	0.964	0.770	0.646	0.556	0.491	0.430	0.246
5	1.760	1.755	1.740	1.720	1.680	1.635	1.570	1.495	1.395	1.265	1.015	0.820	0.700	0.610	0.540	0.480	0.290
10	1.865	1.860	1.855	1.840	1.800	1.750	1.690	1.610	1.520	1.390	1.100	0.920	0.800	0.710	0.640	0.580	0.400
∞	2.000	1.995	1.980	1.954	1.917	1.868	1.806	1.726	1.625	1.492	1.273	1.067	0.937	0.845	0.772	0.712	0.517

r/H

M_H
γ = 0.2

α / H	r / R																
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.090	0.090	0.090	0.090	0.090	0.090	0.090	0.090	0.091	0.091	0.044	-0.001	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.181	0.182	0.183	0.182	0.171	0.088	0.009	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000	0.000
0.3	0.272	0.272	0.272	0.272	0.273	0.273	0.272	0.272	0.266	0.238	0.132	0.030	0.006	0.000	-0.001	-0.002	0.000
0.4	0.366	0.367	0.367	0.368	0.369	0.369	0.368	0.361	0.342	0.299	0.173	0.055	0.017	0.002	-0.002	-0.003	-0.000
0.5	0.467	0.467	0.466	0.465	0.464	0.461	0.455	0.440	0.411	0.355	0.214	0.083	0.034	0.012	0.002	-0.003	-0.002
0.6	0.564	0.564	0.564	0.561	0.556	0.550	0.540	0.513	0.472	0.407	0.254	0.114	0.054	0.026	0.008	0.000	-0.003
0.7	0.660	0.659	0.658	0.653	0.644	0.632	0.614	0.582	0.534	0.457	0.294	0.146	0.078	0.042	0.020	0.008	-0.004
0.8	0.752	0.750	0.743	0.736	0.726	0.708	0.682	0.606	0.590	0.504	0.334	0.176	0.102	0.060	0.034	0.018	-0.004
0.9	0.836	0.833	0.824	0.814	0.799	0.779	0.748	0.704	0.640	0.550	0.372	0.209	0.130	0.081	0.049	0.028	-0.003
1	0.910	0.908	0.901	0.889	0.869	0.843	0.807	0.759	0.691	0.595	0.410	0.242	0.157	0.103	0.067	0.042	-0.002
1.1	0.980	0.977	0.968	0.954	0.932	0.904	0.862	0.810	0.738	0.636	0.446	0.272	0.184	0.124	0.086	0.056	0.004
1.2	1.040	1.037	1.028	1.012	0.988	0.958	0.912	0.856	0.780	0.676	0.479	0.302	0.209	0.148	0.104	0.072	0.008
1.3	1.098	1.095	1.086	1.064	1.042	1.010	0.962	0.900	0.820	0.712	0.512	0.330	0.234	0.170	0.123	0.088	0.012
1.4	1.150	1.146	1.136	1.117	1.088	1.054	1.003	0.940	0.856	0.746	0.543	0.358	0.260	0.192	0.140	0.106	0.018
1.5	1.194	1.190	1.180	1.161	1.132	1.096	1.042	0.978	0.890	0.778	0.572	0.385	0.284	0.212	0.160	0.122	0.025
1.6	1.236	1.232	1.220	1.200	1.168	1.131	1.076	1.012	0.924	0.808	0.598	0.411	0.306	0.232	0.178	0.138	0.034
1.7	1.272	1.268	1.256	1.236	1.204	1.162	1.108	1.044	0.954	0.836	0.624	0.436	0.329	0.252	0.196	0.154	0.042
1.8	1.306	1.302	1.290	1.269	1.234	1.198	1.139	1.072	0.982	0.862	0.650	0.458	0.352	0.272	0.214	0.170	0.051
1.9	1.336	1.332	1.320	1.297	1.262	1.223	1.166	1.098	1.008	0.887	0.672	0.480	0.372	0.291	0.232	0.186	0.060
2	1.363	1.359	1.347	1.324	1.292	1.248	1.193	1.121	1.031	0.908	0.691	0.500	0.390	0.310	0.248	0.201	0.070
2.2	1.414	1.409	1.396	1.372	1.338	1.296	1.238	1.166	1.074	0.951	0.732	0.538	0.426	0.344	0.280	0.230	0.087
2.4	1.456	1.451	1.438	1.414	1.380	1.337	1.278	1.204	1.110	0.988	0.765	0.570	0.455	0.370	0.308	0.256	0.101
2.5	1.476	1.471	1.458	1.432	1.399	1.356	1.297	1.222	1.128	1.002	0.779	0.584	0.469	0.387	0.320	0.269	0.115
3	1.532	1.526	1.514	1.486	1.452	1.406	1.346	1.270	1.176	1.050	0.827	0.632	0.517	0.434	0.366	0.314	0.154
3.5	1.612	1.606	1.594	1.567	1.532	1.486	1.426	1.348	1.254	1.125	0.899	0.698	0.578	0.492	0.424	0.370	0.192
4	1.656	1.651	1.638	1.612	1.576	1.530	1.470	1.392	1.296	1.168	0.929	0.738	0.616	0.529	0.459	0.406	0.227
5	1.717	1.712	1.696	1.671	1.635	1.589	1.527	1.450	1.353	1.225	0.979	0.789	0.671	0.584	0.513	0.456	0.272
10	1.840	1.835	1.825	1.804	1.763	1.722	1.661	1.579	1.486	1.353	1.076	0.902	0.779	0.697	0.625	0.564	0.379
∞	1.920	1.915	1.901	1.876	1.840	1.793	1.734	1.657	1.560	1.432	1.222	1.024	0.900	0.811	0.741	0.684	0.496

$\gamma = 0.3$

M_H

		r/R																
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.076	0.076	0.078	0.037	0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.149	0.150	0.150	0.150	0.151	0.151	0.154	0.154	0.155	0.157	0.149	0.074	0.002	-0.004	-0.003	-0.001	0.000	0.000
0.3	0.224	0.224	0.224	0.225	0.226	0.228	0.230	0.230	0.232	0.232	0.211	0.112	0.019	-0.002	-0.005	-0.005	-0.005	-0.001
0.4	0.308	0.309	0.310	0.312	0.313	0.314	0.312	0.312	0.309	0.298	0.263	0.147	0.040	0.008	-0.004	-0.006	-0.006	-0.001
0.5	0.395	0.396	0.396	0.397	0.399	0.397	0.387	0.387	0.377	0.356	0.311	0.184	0.064	0.021	0.002	-0.005	-0.007	-0.003
0.6	0.486	0.485	0.483	0.480	0.476	0.472	0.468	0.468	0.448	0.414	0.360	0.220	0.090	0.038	0.010	0.003	-0.004	-0.007
0.7	0.573	0.573	0.569	0.564	0.557	0.546	0.536	0.536	0.512	0.470	0.404	0.254	0.121	0.058	0.024	0.012	0.004	-0.008
0.8	0.654	0.653	0.649	0.644	0.634	0.616	0.600	0.600	0.570	0.521	0.448	0.288	0.150	0.079	0.040	0.022	0.012	-0.010
0.9	0.730	0.728	0.724	0.715	0.702	0.682	0.660	0.660	0.622	0.568	0.488	0.321	0.176	0.102	0.060	0.033	0.020	-0.009
1	0.800	0.798	0.793	0.783	0.767	0.746	0.715	0.715	0.673	0.623	0.526	0.354	0.203	0.127	0.080	0.047	0.030	-0.008
1.1	0.866	0.863	0.857	0.845	0.826	0.802	0.763	0.763	0.718	0.653	0.562	0.386	0.230	0.152	0.099	0.062	0.042	-0.004
1.2	0.924	0.921	0.914	0.901	0.880	0.856	0.810	0.810	0.759	0.692	0.596	0.416	0.256	0.175	0.118	0.077	0.054	0.000
1.3	0.980	0.977	0.969	0.952	0.932	0.902	0.854	0.854	0.801	0.729	0.629	0.446	0.283	0.198	0.136	0.092	0.068	0.003
1.4	1.029	1.025	1.017	1.001	0.977	0.944	0.896	0.896	0.840	0.765	0.662	0.474	0.310	0.220	0.156	0.109	0.081	0.006
1.5	1.072	1.068	1.058	1.041	1.016	0.982	0.934	0.934	0.876	0.798	0.693	0.502	0.333	0.242	0.176	0.128	0.094	0.010
1.6	1.112	1.108	1.098	1.079	1.051	1.016	0.972	0.972	0.912	0.829	0.721	0.528	0.355	0.262	0.196	0.146	0.109	0.019
1.7	1.148	1.144	1.133	1.114	1.085	1.048	1.004	1.004	0.943	0.859	0.748	0.554	0.378	0.282	0.214	0.164	0.124	0.027
1.8	1.182	1.178	1.167	1.148	1.116	1.080	1.033	1.033	0.971	0.886	0.774	0.577	0.400	0.302	0.232	0.180	0.138	0.034
1.9	1.212	1.208	1.196	1.176	1.145	1.108	1.059	1.059	0.997	0.911	0.798	0.599	0.421	0.321	0.250	0.196	0.152	0.042
2	1.236	1.232	1.220	1.200	1.170	1.130	1.078	1.078	1.014	0.932	0.820	0.616	0.438	0.338	0.268	0.210	0.168	0.050
2.2	1.292	1.287	1.275	1.253	1.222	1.184	1.128	1.128	1.061	0.976	0.860	0.656	0.478	0.372	0.298	0.240	0.194	0.068
2.4	1.334	1.329	1.317	1.294	1.262	1.224	1.167	1.167	1.097	1.011	0.894	0.688	0.508	0.404	0.326	0.267	0.221	0.085
2.5	1.348	1.343	1.330	1.308	1.278	1.235	1.180	1.180	1.113	1.025	0.913	0.703	0.508	0.410	0.345	0.280	0.233	0.090
3	1.426	1.420	1.409	1.387	1.357	1.314	1.254	1.254	1.184	1.098	0.981	0.766	0.566	0.474	0.396	0.332	0.285	0.128
3.5	1.484	1.478	1.466	1.444	1.413	1.369	1.309	1.309	1.239	1.152	1.034	0.817	0.634	0.524	0.441	0.376	0.327	0.161
4	1.530	1.525	1.513	1.490	1.457	1.414	1.353	1.353	1.284	1.195	1.076	0.854	0.672	0.558	0.475	0.410	0.360	0.195
5	1.590	1.585	1.570	1.545	1.515	1.470	1.415	1.415	1.340	1.250	1.130	0.900	0.725	0.615	0.535	0.470	0.415	0.240
10	1.710	1.700	1.690	1.670	1.640	1.610	1.550	1.550	1.470	1.380	1.260	1.000	0.840	0.720	0.640	0.580	0.520	0.350
∞	1.820	1.815	1.802	1.778	1.744	1.700	1.643	1.643	1.57	1.479	1.358	1.158	0.971	0.853	0.769	0.703	0.648	0.470

M H
 $\nu = 0.4$

$\frac{r}{H}$	$\frac{r}{R}$																
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.046	0.047	0.048	0.049	0.053	0.023	-0.005	-0.002	-0.001	0	0	0
0.2	0.095	0.095	0.095	0.096	0.097	0.098	0.100	0.103	0.108	0.107	0.048	-0.008	-0.009	-0.006	-0.003	-0.002	-0.000
0.3	0.150	0.151	0.152	0.153	0.154	0.157	0.160	0.164	0.166	0.153	0.074	-0.002	-0.013	-0.014	-0.014	-0.006	-0.002
0.4	0.208	0.210	0.211	0.214	0.217	0.221	0.225	0.227	0.221	0.195	0.099	0.010	-0.012	-0.016	-0.015	-0.012	-0.003
0.5	0.277	0.278	0.280	0.282	0.286	0.289	0.290	0.287	0.272	0.235	0.127	0.026	-0.006	-0.017	-0.019	-0.017	-0.006
0.6	0.348	0.349	0.351	0.354	0.358	0.359	0.355	0.346	0.320	0.274	0.154	0.044	0.004	-0.013	-0.018	-0.020	-0.008
0.7	0.426	0.427	0.428	0.429	0.428	0.425	0.416	0.397	0.366	0.312	0.183	0.065	0.018	-0.004	-0.015	-0.020	-0.012
0.8	0.504	0.503	0.502	0.500	0.496	0.488	0.472	0.448	0.410	0.350	0.212	0.088	0.034	0.006	-0.011	-0.018	-0.015
0.9	0.576	0.575	0.572	0.567	0.558	0.547	0.526	0.496	0.452	0.386	0.241	0.110	0.052	0.018	-0.002	-0.013	-0.018
1	0.645	0.644	0.640	0.632	0.621	0.603	0.579	0.544	0.494	0.420	0.270	0.135	0.070	0.032	0.008	-0.007	-0.020
1.1	0.707	0.705	0.701	0.691	0.676	0.656	0.628	0.587	0.532	0.454	0.299	0.158	0.089	0.048	0.020	0.002	-0.021
1.2	0.764	0.762	0.757	0.746	0.730	0.704	0.672	0.630	0.572	0.484	0.328	0.184	0.110	0.064	0.033	0.012	-0.020
1.3	0.816	0.813	0.807	0.796	0.778	0.750	0.714	0.669	0.608	0.519	0.354	0.208	0.132	0.081	0.048	0.023	-0.018
1.4	0.866	0.863	0.856	0.844	0.824	0.792	0.754	0.706	0.640	0.549	0.381	0.232	0.152	0.099	0.062	0.035	-0.015
1.5	0.912	0.909	0.898	0.883	0.862	0.830	0.790	0.740	0.671	0.578	0.407	0.254	0.172	0.116	0.078	0.047	-0.012
1.6	0.950	0.947	0.939	0.922	0.898	0.864	0.824	0.771	0.700	0.606	0.431	0.277	0.192	0.134	0.092	0.061	-0.008
1.7	0.986	0.983	0.974	0.956	0.932	0.899	0.854	0.801	0.729	0.632	0.454	0.298	0.211	0.151	0.108	0.075	-0.003
1.8	1.019	1.016	1.007	0.991	0.964	0.930	0.884	0.828	0.756	0.656	0.477	0.318	0.230	0.168	0.124	0.088	0.003
1.9	1.050	1.046	1.036	1.018	0.992	0.958	0.910	0.854	0.780	0.680	0.498	0.337	0.248	0.185	0.138	0.102	0.009
2	1.076	1.072	1.062	1.044	1.018	0.982	0.936	0.878	0.802	0.700	0.516	0.356	0.264	0.200	0.152	0.114	0.016
2.2	1.128	1.124	1.113	1.093	1.065	1.028	0.983	0.921	0.842	0.740	0.554	0.391	0.296	0.230	0.180	0.140	0.032
2.4	1.170	1.165	1.154	1.134	1.106	1.068	1.020	0.958	0.878	0.775	0.586	0.422	0.326	0.257	0.206	0.164	0.047
2.5	1.188	1.183	1.173	1.153	1.125	1.085	1.038	0.975	0.895	0.790	0.600	0.435	0.340	0.270	0.218	0.175	0.055
3	1.264	1.259	1.249	1.229	1.202	1.162	1.108	1.044	0.964	0.856	0.664	0.496	0.398	0.326	0.271	0.226	0.090
3.5	1.322	1.317	1.307	1.287	1.258	1.218	1.164	1.099	1.018	0.908	0.712	0.545	0.444	0.371	0.314	0.267	0.124
4	1.368	1.363	1.352	1.332	1.302	1.263	1.206	1.142	1.060	0.950	0.750	0.584	0.482	0.406	0.348	0.301	0.154
5	1.430	1.425	1.415	1.390	1.360	1.320	1.265	1.200	1.120	1.010	0.800	0.640	0.535	0.460	0.400	0.355	0.200
10	1.550	1.540	1.540	1.520	1.490	1.450	1.400	1.330	1.250	1.140	0.900	0.750	0.650	0.570	0.520	0.470	0.310
∞	1.680	1.676	1.663	1.641	1.610	1.569	1.517	1.450	1.365	1.253	1.069	0.896	0.787	0.710	0.648	0.598	0.434

3-2



M H

		r/R																
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.007	0.016	0.001	-0.013	-0.005	-0.002	-0.001	-0.000	-0.000
0.2	0.003	0.003	0.005	0.007	0.010	0.013	0.018	0.025	0.036	0.046	0.066	0.006	-0.032	-0.024	-0.015	-0.009	-0.006	-0.000
0.3	0.030	0.031	0.032	0.034	0.038	0.042	0.052	0.066	0.073	0.074	0.074	0.014	-0.041	-0.039	-0.032	-0.023	-0.016	-0.004
0.4	0.067	0.068	0.070	0.075	0.081	0.090	0.100	0.109	0.114	0.102	0.102	0.028	-0.041	-0.051	-0.046	-0.038	-0.030	-0.010
0.5	0.116	0.117	0.121	0.127	0.135	0.143	0.152	0.158	0.155	0.132	0.132	0.045	-0.034	-0.053	-0.054	-0.049	-0.041	-0.016
0.6	0.183	0.184	0.187	0.191	0.194	0.201	0.206	0.206	0.194	0.162	0.162	0.064	-0.024	-0.048	-0.057	-0.056	-0.052	-0.022
0.7	0.247	0.248	0.250	0.253	0.256	0.261	0.260	0.252	0.232	0.191	0.191	0.086	-0.010	-0.052	-0.056	-0.058	-0.056	-0.028
0.8	0.318	0.319	0.320	0.321	0.320	0.317	0.311	0.298	0.270	0.222	0.222	0.110	0.006	-0.032	-0.049	-0.058	-0.058	-0.035
0.9	0.384	0.384	0.384	0.383	0.380	0.376	0.360	0.342	0.309	0.255	0.255	0.134	0.024	-0.021	-0.042	-0.055	-0.056	-0.040
1	0.450	0.450	0.448	0.445	0.438	0.428	0.411	0.386	0.347	0.287	0.287	0.160	0.045	-0.006	-0.034	-0.049	-0.056	-0.045
1.1	0.512	0.510	0.508	0.502	0.496	0.480	0.456	0.428	0.384	0.319	0.319	0.186	0.066	0.011	-0.022	-0.040	-0.052	-0.049
1.2	0.568	0.566	0.564	0.556	0.544	0.526	0.500	0.466	0.419	0.350	0.350	0.212	0.088	0.028	-0.008	-0.028	-0.044	-0.051
1.3	0.620	0.618	0.615	0.606	0.592	0.570	0.542	0.504	0.452	0.379	0.379	0.238	0.112	0.048	0.008	-0.018	-0.036	-0.052
1.4	0.670	0.668	0.664	0.652	0.635	0.610	0.582	0.541	0.484	0.408	0.408	0.262	0.133	0.066	0.024	-0.006	-0.026	-0.051
1.5	0.716	0.714	0.708	0.694	0.674	0.648	0.618	0.576	0.514	0.436	0.436	0.286	0.156	0.085	0.040	0.008	-0.014	-0.048
1.6	0.756	0.754	0.748	0.732	0.712	0.685	0.652	0.606	0.544	0.462	0.462	0.310	0.176	0.104	0.055	0.021	-0.003	-0.046
1.7	0.794	0.792	0.784	0.768	0.748	0.716	0.682	0.634	0.572	0.488	0.488	0.332	0.196	0.122	0.070	0.036	0.008	-0.043
1.8	0.828	0.826	0.817	0.800	0.780	0.746	0.710	0.664	0.598	0.512	0.512	0.353	0.216	0.140	0.086	0.050	0.020	-0.038
1.9	0.856	0.854	0.844	0.830	0.808	0.774	0.736	0.689	0.622	0.534	0.534	0.374	0.236	0.157	0.102	0.064	0.032	-0.033
2	0.884	0.882	0.872	0.856	0.834	0.802	0.762	0.712	0.644	0.556	0.556	0.394	0.254	0.174	0.118	0.076	0.046	-0.028
2.2	0.934	0.932	0.928	0.906	0.881	0.850	0.808	0.756	0.688	0.595	0.595	0.432	0.288	0.205	0.147	0.104	0.070	-0.015
2.4	0.976	0.974	0.964	0.948	0.922	0.888	0.843	0.794	0.724	0.630	0.630	0.464	0.318	0.234	0.174	0.128	0.094	-0.002
2.5	0.995	0.993	0.983	0.965	0.940	0.908	0.865	0.810	0.740	0.645	0.645	0.478	0.333	0.248	0.188	0.140	0.105	0.005
3	1.072	1.070	1.060	1.042	1.016	0.980	0.938	0.880	0.808	0.712	0.712	0.540	0.394	0.308	0.244	0.196	0.155	0.042
3.5	1.132	1.128	1.118	1.100	1.072	1.038	0.994	0.936	0.862	0.765	0.765	0.588	0.444	0.356	0.290	0.240	0.196	0.075
4	1.176	1.173	1.162	1.144	1.118	1.082	1.036	0.980	0.904	0.806	0.806	0.626	0.482	0.393	0.326	0.274	0.230	0.106
5	1.240	1.236	1.225	1.205	1.180	1.145	1.095	1.040	0.965	0.865	0.865	0.680	0.535	0.445	0.380	0.325	0.285	0.150
10	1.370	1.366	1.360	1.340	1.310	1.270	1.230	1.170	1.100	1.000	1.000	0.780	0.650	0.560	0.490	0.440	0.400	0.260
∞	1.500	1.496	1.485	1.465	1.438	1.401	1.355	1.295	1.219	1.119	1.119	0.955	0.800	0.703	0.634	0.579	0.534	0.388

σ/H

$v = 0$

M'_H

H/α	r/R																
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.185	0.188	0.187	0.184	0.180	0.175	0.169	0.161	0.152	0.139	0.110	0.092	0.080	0.071	0.064	0.058	0.040
0.2	0.349	0.351	0.348	0.344	0.336	0.327	0.314	0.299	0.279	0.253	0.203	0.164	0.140	0.122	0.108	0.096	0.058
0.3	0.491	0.493	0.489	0.481	0.470	0.456	0.438	0.414	0.385	0.345	0.274	0.215	0.179	0.152	0.131	0.114	0.061
0.4	0.612	0.613	0.607	0.597	0.583	0.564	0.540	0.510	0.471	0.419	0.328	0.249	0.202	0.167	0.140	0.118	0.054
0.5	0.712	0.712	0.705	0.694	0.677	0.654	0.625	0.588	0.541	0.478	0.367	0.269	0.211	0.170	0.139	0.114	0.043
0.6	0.792	0.793	0.785	0.772	0.753	0.727	0.694	0.652	0.597	0.524	0.394	0.279	0.213	0.166	0.131	0.104	0.032
0.7	0.857	0.858	0.849	0.835	0.815	0.787	0.751	0.704	0.643	0.561	0.414	0.282	0.209	0.158	0.120	0.091	0.022
0.8	0.908	0.909	0.900	0.885	0.864	0.835	0.797	0.747	0.681	0.592	0.428	0.281	0.201	0.147	0.108	0.079	0.014
0.9	0.947	0.947	0.939	0.925	0.903	0.874	0.835	0.783	0.713	0.617	0.439	0.277	0.192	0.135	0.095	0.066	0.008
1	0.976	0.976	0.969	0.955	0.934	0.905	0.866	0.812	0.740	0.638	0.446	0.271	0.181	0.123	0.083	0.056	0.003
1.1	0.998	0.998	0.991	0.978	0.958	0.930	0.891	0.838	0.764	0.656	0.449	0.264	0.171	0.112	0.072	0.046	0.000
1.2	1.013	1.014	1.007	0.995	0.976	0.950	0.912	0.859	0.784	0.673	0.453	0.257	0.160	0.101	0.062	0.037	-0.002
1.3	1.024	1.024	1.018	1.007	0.991	0.966	0.930	0.878	0.802	0.688	0.457	0.250	0.150	0.091	0.053	0.030	-0.003
1.4	1.028	1.030	1.025	1.016	1.001	0.979	0.945	0.894	0.819	0.702	0.461	0.242	0.141	0.081	0.045	0.024	-0.004
1.5	1.032	1.034	1.030	1.022	1.009	0.989	0.957	0.909	0.834	0.715	0.465	0.235	0.131	0.073	0.038	0.018	-0.004
2	1.028	1.031	1.031	1.030	1.026	1.017	0.998	0.961	0.894	0.770	0.473	0.198	0.091	0.038	0.012	0.001	-0.004
2.5	1.020	1.023	1.024	1.026	1.026	1.024	1.014	0.989	0.933	0.812	0.478	0.166	0.060	0.017	-0.000	-0.006	-0.003
3	1.015	1.018	1.018	1.019	1.021	1.022	1.020	1.005	0.961	0.846	0.480	0.138	0.038	0.004	-0.006	-0.007	-0.002
4	1.006	1.010	1.010	1.011	1.013	1.015	1.018	1.016	0.994	0.894	0.484	0.094	0.011	-0.007	-0.007	-0.005	-0.001
5	1.000	1.004	1.005	1.007	1.008	1.010	1.013	1.017	1.008	0.935	0.486	0.062	-0.002	-0.008	-0.006	-0.004	0.000
6	1.000	1.002	1.003	1.004	1.005	1.007	1.010	1.014	1.014	0.962	0.488	0.039	-0.008	-0.007	-0.004	-0.003	0.000
7	1.000	1.000	1.002	1.002	1.003	1.005	1.008	1.011	1.015	0.980	0.489	0.022	-0.009	-0.006	-0.003	-0.002	0.000
8	1.000	1.000	1.000	1.002	1.002	1.004	1.006	1.009	1.014	0.993	0.490	0.010	-0.009	-0.005	-0.002	-0.001	0.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.002	1.003	1.005	1.008	1.013	1.002	0.491	0.002	-0.008	-0.004	-0.002	0.000	0.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.002	1.003	1.007	1.011	1.007	0.491	-0.003	-0.006	-0.003	-0.001	0.000	0.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.003	1.006	1.008	0.493	-0.010	-0.003	-0.001	0.000	0.000	0.000
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.003	1.006	0.495	-0.007	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.002	0.498	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
∞	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.5	0	0	0	0	0	0

3-2

$\gamma = 0.2$

M_H

P/H	r/R																
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.183	0.182	0.181	0.179	0.175	0.171	0.165	0.157	0.148	0.134	0.107	0.090	0.077	0.069	0.062	0.056	0.038
0.2	0.341	0.340	0.337	0.332	0.325	0.316	0.303	0.288	0.269	0.243	0.194	0.157	0.133	0.116	0.102	0.091	0.054
0.3	0.474	0.473	0.469	0.462	0.451	0.438	0.419	0.397	0.369	0.330	0.261	0.204	0.168	0.143	0.122	0.102	0.054
0.4	0.586	0.584	0.579	0.569	0.556	0.539	0.515	0.486	0.448	0.398	0.309	0.232	0.186	0.154	0.127	0.107	0.046
0.5	0.677	0.675	0.669	0.658	0.641	0.620	0.592	0.557	0.512	0.451	0.343	0.248	0.193	0.154	0.123	0.100	0.035
0.6	0.750	0.748	0.741	0.728	0.711	0.686	0.655	0.615	0.562	0.292	0.366	0.255	0.191	0.147	0.114	0.089	0.023
0.7	0.807	0.805	0.797	0.784	0.765	0.738	0.704	0.657	0.603	0.524	0.383	0.255	0.185	0.136	0.102	0.076	-0.014
0.8	0.850	0.848	0.840	0.827	0.807	0.780	0.744	0.697	0.635	0.550	0.393	0.251	0.176	0.125	0.090	0.063	0.007
0.9	0.882	0.880	0.872	0.859	0.839	0.812	0.776	0.728	0.663	0.572	0.401	0.246	0.166	0.114	0.077	0.052	0.002
1	0.904	0.902	0.895	0.883	0.863	0.837	0.801	0.753	0.686	0.590	0.407	0.240	0.156	0.102	0.066	0.041	-0.002
1.1	0.917	0.917	0.911	0.899	0.882	0.857	0.823	0.775	0.706	0.607	0.410	0.232	0.145	0.091	0.055	0.032	-0.004
1.2	0.926	0.926	0.921	0.911	0.896	0.873	0.840	0.793	0.725	0.621	0.412	0.224	0.134	0.079	0.045	0.023	-0.005
1.3	0.932	0.931	0.927	0.919	0.906	0.886	0.855	0.808	0.740	0.633	0.414	0.216	0.123	0.069	0.037	0.017	-0.005
1.4	0.933	0.934	0.930	0.924	0.913	0.896	0.866	0.823	0.754	0.645	0.416	0.208	0.114	0.061	0.030	0.011	-0.005
1.5	0.934	0.934	0.932	0.927	0.918	0.903	0.876	0.834	0.767	0.657	0.418	0.200	0.105	0.053	0.023	0.007	-0.005
2	0.927	0.927	0.925	0.924	0.922	0.916	0.903	0.873	0.815	0.704	0.425	0.165	0.068	0.023	0.003	-0.005	-0.003
2.5	0.909	0.910	0.912	0.914	0.916	0.917	0.913	0.897	0.850	0.743	0.429	0.135	0.043	0.006	-0.005	-0.007	-0.001
3	0.899	0.900	0.903	0.907	0.911	0.914	0.915	0.908	0.874	0.774	0.432	0.111	0.023	-0.003	-0.008	-0.007	0.000
4	0.900	0.900	0.900	0.900	0.902	0.907	0.911	0.913	0.900	0.821	0.435	0.071	0.002	-0.008	-0.006	-0.004	0.000
5	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.901	0.906	0.911	0.910	0.853	0.437	0.044	-0.006	-0.007	-0.004	-0.001	0.000
6	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.902	0.908	0.912	0.874	0.439	0.024	-0.010	-0.005	-0.001	0.000	0.000
7	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.905	0.911	0.890	0.439	0.011	-0.008	-0.003	0.000	0.000	0.000
8	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.902	0.909	0.900	0.440	0.002	-0.007	-0.001	0.000	0.000	0.000
9	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.907	0.905	0.441	-0.004	-0.006	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.905	0.909	0.441	-0.007	-0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
15	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.907	0.443	-0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.904	0.445	-0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.446	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
∞	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.45	0	0	0	0	0	0

$\gamma = 0.3$

M'_H

P/H	r/R																
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.171	0.170	0.169	0.167	0.164	0.161	0.155	0.147	0.138	0.126	0.100	0.084	0.072	0.064	0.058	0.052	0.035
0.2	0.318	0.317	0.314	0.309	0.303	0.294	0.283	0.268	0.250	0.226	0.180	0.145	0.123	0.107	0.094	0.083	0.048
0.3	0.439	0.438	0.434	0.427	0.418	0.405	0.387	0.367	0.340	0.305	0.239	0.181	0.148	0.125	0.107	0.091	0.046
0.4	0.539	0.537	0.532	0.523	0.511	0.494	0.472	0.445	0.410	0.365	0.281	0.203	0.164	0.138	0.112	0.093	0.036
0.5	0.618	0.616	0.610	0.600	0.585	0.565	0.539	0.507	0.466	0.410	0.308	0.219	0.169	0.134	0.105	0.084	0.025
0.6	0.679	0.677	0.671	0.659	0.643	0.621	0.591	0.556	0.509	0.445	0.325	0.224	0.166	0.123	0.094	0.072	0.014
0.7	0.727	0.725	0.718	0.706	0.690	0.665	0.634	0.593	0.542	0.470	0.337	0.222	0.158	0.111	0.081	0.058	0.005
0.8	0.760	0.758	0.751	0.740	0.723	0.700	0.669	0.622	0.566	0.490	0.344	0.215	0.146	0.100	0.069	0.044	-0.001
0.9	0.784	0.782	0.776	0.765	0.749	0.727	0.693	0.648	0.588	0.510	0.350	0.208	0.133	0.088	0.057	0.033	-0.005
1	0.800	0.798	0.793	0.783	0.768	0.746	0.710	0.668	0.607	0.526	0.355	0.203	0.123	0.077	0.047	0.021	-0.008
1.1	0.810	0.809	0.804	0.795	0.782	0.760	0.723	0.683	0.624	0.542	0.358	0.194	0.110	0.066	0.036	0.017	-0.010
1.2	0.813	0.812	0.809	0.802	0.790	0.770	0.740	0.698	0.640	0.554	0.360	0.186	0.098	0.057	0.027	0.009	-0.010
1.3	0.813	0.811	0.809	0.804	0.794	0.778	0.750	0.711	0.654	0.565	0.362	0.178	0.088	0.047	0.019	0.003	-0.010
1.4	0.810	0.809	0.807	0.806	0.796	0.786	0.757	0.720	0.664	0.575	0.363	0.170	0.079	0.038	0.012	-0.003	-0.009
1.5	0.806	0.809	0.807	0.805	0.800	0.792	0.762	0.728	0.673	0.584	0.364	0.162	0.072	0.030	0.006	-0.006	-0.008
2	0.790	0.791	0.792	0.794	0.787	0.794	0.774	0.754	0.712	0.622	0.367	0.128	0.042	0.003	-0.010	-0.014	-0.006
2.5	0.770	0.772	0.775	0.779	0.782	0.786	0.779	0.772	0.744	0.657	0.368	0.101	0.019	-0.011	-0.016	-0.014	-0.002
3	0.756	0.758	0.761	0.765	0.771	0.778	0.783	0.785	0.766	0.682	0.368	0.077	0.001	-0.018	-0.018	-0.012	-0.001
4	0.750	0.752	0.753	0.755	0.759	0.767	0.777	0.779	0.780	0.721	0.368	0.040	-0.017	-0.022	-0.013	-0.006	-0.001
5	0.746	0.748	0.749	0.751	0.753	0.756	0.772	0.774	0.784	0.745	0.369	0.012	-0.020	-0.014	-0.007	-0.001	0.000
6	0.743	0.744	0.745	0.747	0.749	0.752	0.768	0.770	0.780	0.760	0.369	0.005	-0.018	-0.010	-0.005	0.000	0.000
7	0.743	0.743	0.743	0.744	0.746	0.748	0.764	0.766	0.775	0.774	0.370	-0.006	-0.016	-0.006	-0.003	0.000	0.000
8	0.743	0.743	0.743	0.744	0.745	0.746	0.762	0.763	0.769	0.780	0.370	-0.016	-0.011	-0.004	-0.002	0.000	0.000
9	0.743	0.743	0.743	0.743	0.744	0.745	0.758	0.760	0.764	0.784	0.370	-0.020	-0.010	-0.002	-0.001	0.000	0.000
10	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.744	0.755	0.757	0.760	0.780	0.371	-0.021	-0.005	-0.001	0.000	0.000	0.000
15	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.747	0.748	0.749	0.775	0.371	-0.013	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000
20	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.744	0.772	0.371	-0.007	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
50	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.744	0.371	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
∞	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.743	0.371	0	0	0	0	0	0

3-2

$\gamma = 0.4$

M_H

		r/R																
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	0.155	0.155	0.154	0.152	0.149	0.145	0.140	0.133	0.125	0.114	0.090	0.075	0.065	0.057	0.052	0.047	0.031
0.2	0	0.286	0.285	0.283	0.278	0.272	0.264	0.253	0.240	0.224	0.202	0.160	0.128	0.107	0.092	0.080	0.071	0.040
0.3	0.391	0.390	0.387	0.380	0.372	0.360	0.344	0.344	0.325	0.300	0.268	0.209	0.159	0.129	0.107	0.090	0.076	0.034
0.4	0.475	0.473	0.469	0.461	0.450	0.434	0.415	0.415	0.390	0.358	0.316	0.240	0.174	0.136	0.108	0.087	0.070	0.022
0.5	0.538	0.536	0.531	0.522	0.509	0.491	0.468	0.468	0.439	0.401	0.350	0.258	0.178	0.132	0.100	0.076	0.057	0.008
0.6	0.584	0.582	0.577	0.567	0.552	0.533	0.507	0.507	0.475	0.432	0.374	0.268	0.175	0.123	0.087	0.061	0.042	-0.003
0.7	0.615	0.613	0.607	0.597	0.583	0.562	0.536	0.536	0.501	0.455	0.391	0.272	0.166	0.110	0.072	0.046	0.027	-0.010
0.8	0.634	0.632	0.627	0.617	0.603	0.583	0.556	0.556	0.520	0.472	0.403	0.273	0.156	0.096	0.058	0.032	0.014	-0.015
0.9	0.643	0.641	0.637	0.628	0.615	0.596	0.570	0.570	0.534	0.484	0.412	0.272	0.145	0.083	0.044	0.019	0.003	-0.019
1	0.645	0.644	0.640	0.632	0.621	0.603	0.579	0.579	0.544	0.494	0.420	0.270	0.135	0.070	0.032	0.008	-0.007	-0.020
1.1	0.642	0.641	0.637	0.631	0.622	0.607	0.585	0.585	0.552	0.503	0.427	0.268	0.124	0.058	0.021	-0.002	-0.014	-0.020
1.2	0.634	0.633	0.631	0.627	0.620	0.608	0.589	0.589	0.558	0.510	0.433	0.266	0.114	0.047	0.011	-0.010	-0.020	-0.019
1.3	0.624	0.624	0.623	0.621	0.616	0.607	0.591	0.591	0.563	0.516	0.438	0.264	0.104	0.037	0.002	-0.016	-0.024	-0.018
1.4	0.613	0.613	0.614	0.613	0.611	0.605	0.592	0.592	0.566	0.522	0.443	0.262	0.095	0.028	-0.005	-0.021	-0.028	-0.017
1.5	0.600	0.602	0.604	0.605	0.605	0.602	0.591	0.591	0.569	0.526	0.448	0.260	0.087	0.020	-0.012	-0.026	-0.030	-0.016
2	0.554	0.556	0.559	0.564	0.571	0.577	0.580	0.580	0.573	0.543	0.470	0.253	0.051	-0.011	-0.033	-0.037	-0.034	-0.011
2.5	0.521	0.524	0.528	0.534	0.542	0.552	0.563	0.563	0.567	0.552	0.488	0.248	0.024	-0.031	-0.042	-0.038	-0.030	-0.007
3	0.504	0.506	0.509	0.514	0.521	0.531	0.545	0.545	0.557	0.555	0.502	0.244	0.003	-0.042	-0.044	-0.034	-0.024	-0.005
4	0.486	0.488	0.489	0.491	0.496	0.504	0.516	0.516	0.534	0.550	0.522	0.240	-0.025	-0.050	-0.037	-0.024	-0.015	-0.002
5	0.474	0.476	0.477	0.480	0.483	0.489	0.499	0.499	0.515	0.539	0.534	0.238	-0.042	-0.047	-0.028	-0.016	-0.009	-0.001
6	0.467	0.469	0.471	0.473	0.477	0.481	0.488	0.488	0.502	0.527	0.540	0.236	-0.051	-0.040	-0.021	-0.011	-0.006	0.000
7	0.467	0.467	0.468	0.470	0.473	0.477	0.482	0.482	0.493	0.515	0.541	0.235	-0.055	-0.033	-0.015	-0.008	-0.004	0.000
8	0.467	0.467	0.467	0.468	0.470	0.473	0.478	0.478	0.486	0.506	0.540	0.235	-0.056	-0.027	-0.011	-0.006	-0.003	0.000
9	0.467	0.467	0.467	0.467	0.468	0.471	0.475	0.475	0.482	0.499	0.536	0.234	-0.054	-0.022	-0.009	-0.004	-0.002	0.000
10	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.469	0.473	0.473	0.479	0.493	0.531	0.234	-0.051	-0.018	-0.007	-0.003	-0.001	0.000
15	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.470	0.478	0.510	0.233	-0.032	-0.007	-0.002	0.000	0.000	0.000
20	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.472	0.494	0.233	-0.019	-0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
50	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.469	0.233	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
∞	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.233	0	0	0	0	0	0

H/R

$\gamma = 0.5$

M'_H

r/H	r/R																
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.137	0.137	0.136	0.134	0.131	0.127	0.123	0.117	0.110	0.100	0.078	0.065	0.056	0.049	0.044	0.040	0.026
0.2	0.248	0.247	0.245	0.241	0.236	0.229	0.219	0.208	0.193	0.173	0.136	0.107	0.089	0.076	0.065	0.057	0.030
0.3	0.334	0.333	0.330	0.325	0.317	0.306	0.293	0.276	0.254	0.225	0.172	0.129	0.102	0.083	0.068	0.055	0.019
0.4	0.398	0.397	0.393	0.386	0.376	0.363	0.346	0.324	0.296	0.258	0.191	0.133	0.099	0.075	0.056	0.042	0.002
0.5	0.442	0.441	0.436	0.428	0.417	0.401	0.381	0.356	0.322	0.278	0.197	0.127	0.087	0.059	0.038	0.023	-0.014
0.6	0.469	0.467	0.462	0.453	0.441	0.424	0.403	0.375	0.338	0.288	0.195	0.114	0.069	0.039	0.018	0.003	-0.027
0.7	0.479	0.478	0.473	0.465	0.452	0.436	0.414	0.385	0.346	0.291	0.189	0.097	0.050	0.019	-0.001	-0.016	-0.036
0.8	0.478	0.476	0.472	0.465	0.454	0.439	0.418	0.389	0.349	0.292	0.180	0.080	0.030	-0.000	-0.020	-0.032	-0.042
0.9	0.467	0.466	0.463	0.458	0.449	0.436	0.416	0.389	0.349	0.290	0.170	0.062	0.012	-0.018	-0.035	-0.045	-0.044
1	0.450	0.450	0.448	0.445	0.438	0.428	0.411	0.386	0.347	0.287	0.140	0.045	-0.006	-0.034	-0.049	-0.056	-0.045
1.1	0.430	0.430	0.429	0.428	0.424	0.417	0.403	0.381	0.344	0.284	0.151	0.030	-0.021	-0.047	-0.060	-0.064	-0.044
1.2	0.409	0.408	0.408	0.409	0.408	0.404	0.394	0.374	0.340	0.280	0.142	0.015	-0.035	-0.058	-0.068	-0.070	-0.043
1.3	0.383	0.384	0.386	0.388	0.390	0.389	0.383	0.367	0.336	0.278	0.134	0.002	-0.047	-0.068	-0.075	-0.074	-0.043
1.4	0.359	0.360	0.363	0.367	0.371	0.374	0.372	0.360	0.333	0.275	0.127	-0.010	-0.058	-0.077	-0.081	-0.077	-0.041
1.5	0.335	0.336	0.340	0.346	0.353	0.359	0.361	0.353	0.329	0.273	0.119	-0.021	-0.067	-0.084	-0.085	-0.080	-0.039
2	0.232	0.234	0.241	0.253	0.269	0.286	0.304	0.315	0.309	0.264	0.090	-0.068	-0.105	-0.108	-0.097	-0.082	-0.032
2.5	0.167	0.169	0.175	0.187	0.203	0.225	0.249	0.273	0.285	0.255	0.069	-0.103	-0.127	-0.116	-0.095	-0.075	-0.024
3	0.126	0.127	0.131	0.138	0.152	0.173	0.201	0.234	0.260	0.247	0.054	-0.126	-0.136	-0.112	-0.085	-0.063	-0.018
4	0.060	0.065	0.069	0.075	0.085	0.102	0.130	0.170	0.218	0.238	0.037	-0.150	-0.132	-0.094	-0.063	-0.044	-0.007
5	0.014	0.017	0.024	0.037	0.049	0.065	0.088	0.126	0.181	0.229	0.029	-0.160	-0.118	-0.074	-0.046	-0.031	-0.001
6	0.000	0.000	0.003	0.012	0.028	0.042	0.062	0.094	0.150	0.218	0.023	-0.161	-0.102	-0.058	-0.035	-0.022	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010	0.027	0.045	0.071	0.124	0.204	0.019	-0.157	-0.087	-0.046	-0.027	-0.015	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.012	0.032	0.056	0.102	0.190	0.016	-0.150	-0.074	-0.037	-0.020	-0.008	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.022	0.044	0.085	0.175	0.014	-0.141	-0.062	-0.030	-0.014	-0.004	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.010	0.034	0.071	0.161	0.012	-0.131	-0.053	-0.024	-0.009	-0.002	0.000
15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.032	0.096	0.009	-0.086	-0.025	-0.005	0.000	0.000	0.000
20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.044	0.006	-0.056	-0.010	0.000	0.000	0.000	0.000
50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	-0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3-2

M Hm

		D				
		0	0.2	0.3	0.4	0.5
H/R	0	0	0	0	0	0
	0.1	0.09	0.09	0.07	0.05	0.01
	0.2	0.19	0.17	0.15	0.10	0.02
	0.3	0.28	0.25	0.22	0.15	0.05
	0.4	0.37	0.33	0.29	0.21	0.09
	0.5	0.45	0.41	0.35	0.26	0.14
	0.6	0.53	0.48	0.42	0.32	0.18
	0.7	0.60	0.55	0.48	0.37	0.23
	0.8	0.66	0.61	0.54	0.42	0.27
	0.9	0.72	0.67	0.59	0.47	0.32
	1	0.78	0.73	0.64	0.52	0.36
	1.1	0.83	0.78	0.69	0.56	0.40
	1.2	0.88	0.83	0.73	0.60	0.44
	1.3	0.93	0.87	0.78	0.64	0.48
	1.4	0.97	0.91	0.81	0.68	0.52
	1.5	1.00	0.95	0.85	0.71	0.55
	1.6	1.04	0.98	0.88	0.75	0.58
	1.7	1.07	1.01	0.91	0.78	0.61
	1.8	1.10	1.04	0.94	0.80	0.64
	1.9	1.12	1.07	0.97	0.83	0.67
2	1.15	1.09	0.99	0.85	0.69	
2.2	1.19	1.14	1.04	0.90	0.73	
2.4	1.23	1.18	1.07	0.93	0.77	
2.5	1.25	1.19	1.09	0.95	0.79	
3	1.31	1.27	1.16	1.02	0.86	
3.5	1.37	1.32	1.21	1.08	0.91	
4	1.41	1.36	1.26	1.12	0.96	
5	1.46	1.42	1.31	1.18	1.02	
10	1.58	1.55	1.44	1.30	1.15	
∞	1.70	1.63	1.54	1.43	1.27	

M' Hm

		ν				
		0	0.2	0.3	0.4	0.5
R/H	0	0	0	0	0	0
	0.1	0.16	0.15	0.14	0.13	0.11
	0.2	0.29	0.28	0.26	0.24	0.20
	0.3	0.41	0.39	0.36	0.32	0.27
	0.4	0.50	0.48	0.43	0.38	0.32
	0.5	0.57	0.55	0.49	0.43	0.34
	0.6	0.63	0.60	0.54	0.46	0.36
	0.7	0.68	0.65	0.58	0.48	0.37
	0.8	0.72	0.68	0.60	0.50	0.37
	0.9	0.76	0.71	0.62	0.51	0.37
	1.0	0.78	0.73	0.64	0.52	0.36
	1.1	0.80	0.75	0.66	0.52	0.35
	1.2	0.82	0.76	0.67	0.53	0.34
	1.3	0.84	0.77	0.68	0.53	0.34
	1.4	0.85	0.78	0.68	0.53	0.33
	1.5	0.86	0.79	0.69	0.53	0.32
	2.0	0.90	0.82	0.71	0.52	0.27
	2.5	0.92	0.84	0.72	0.52	0.23
	3	0.93	0.85	0.73	0.51	0.20
	4	0.95	0.86	0.73	0.50	0.15
5	0.96	0.87	0.73	0.49	0.12	
7	0.97	0.87	0.73	0.48	0.08	
10	0.98	0.88	0.73	0.47	0.05	
∞	1	0.90	0.74	0.47	0	

3-2

K_{Hr}

$\nu = 0.15$

z/H	H/R = 1			H/R = 2			H/R = 4			H/R = 6		
	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1
0	0.650	0.650	0.150	0.650	0.650	0.150	0.650	0.650	0.150	0.650	0.650	0.150
0.05	0.356	0.370	0.194	0.462	0.420	0.205	0.419	0.361	0.198	0.345	0.294	0.176
0.15	0.287	0.262	0.114	0.267	0.206	0.111	0.114	0.090	0.089	0.027	0.029	0.058
0.25	0.222	0.175	0.093	0.129	0.092	0.088	0.000	0.012	0.047	-0.029	-0.013	0.016
0.35	0.166	0.119	0.086	0.045	0.040	0.066	-0.028	-0.011	0.017	-0.027	-0.018	-0.003
0.45	0.123	0.087	0.083	0.003	0.014	0.049	-0.029	-0.018	0.002	-0.020	-0.016	-0.008
0.55	0.095	0.071	0.080	-0.014	0.003	0.037	-0.024	-0.016	-0.003	-0.014	-0.012	-0.007
0.65	0.081	0.067	0.079	-0.014	0.002	0.031	-0.017	-0.012	-0.004	-0.010	-0.008	-0.006
0.75	0.083	0.072	0.079	-0.003	0.009	0.030	-0.009	-0.006	-0.001	-0.005	-0.004	-0.003
0.85	0.099	0.087	0.079	0.017	0.024	0.035	0.000	0.002	0.005	0.000	0.000	0.001
0.95	0.130	0.112	0.082	0.050	0.048	0.044	0.014	0.014	0.014	0.006	0.006	0.006

$\nu = 0.3$

0	0.800	0.800	0.300	0.800	0.800	0.300	0.800	0.800	0.300	0.800	0.800	0.300
0.05	0.469	0.491	0.324	0.580	0.543	0.320	0.532	0.478	0.300	0.449	0.400	0.267
0.15	0.403	0.382	0.223	0.368	0.305	0.190	0.188	0.157	0.142	0.081	0.075	0.095
0.25	0.340	0.290	0.194	0.211	0.169	0.153	0.045	0.051	0.083	-0.004	0.010	0.039
0.35	0.286	0.232	0.182	0.114	0.103	0.122	0.000	0.016	0.042	-0.013	-0.003	0.012
0.45	0.245	0.200	0.176	0.063	0.070	0.099	-0.008	0.003	0.022	-0.009	-0.005	0.003
0.55	0.222	0.187	0.173	0.043	0.056	0.085	-0.006	0.002	0.014	-0.005	-0.003	0.002
0.65	0.218	0.188	0.173	0.043	0.056	0.079	0.004	0.005	0.013	-0.001	0.001	0.003
0.75	0.233	0.203	0.176	0.059	0.068	0.081	0.010	0.012	0.017	0.004	0.005	0.006
0.85	0.267	0.232	0.181	0.090	0.091	0.091	0.022	0.024	0.025	0.010	0.011	0.011
0.95	0.322	0.276	0.190	0.140	0.129	0.109	0.042	0.041	0.039	0.019	0.019	0.019

$\nu = 0.45$

0	0.800	0.800	0.450	0.800	0.800	0.450	0.800	0.800	0.450	0.800	0.800	0.450
0.05	0.551	0.595	0.441	0.667	0.653	0.416	0.622	0.586	0.391	0.537	0.500	0.350
0.15	0.507	0.502	0.315	0.469	0.403	0.245	0.284	0.228	0.177	0.163	0.131	0.123
0.25	0.459	0.408	0.289	0.299	0.239	0.207	0.099	0.084	0.114	0.024	0.027	0.062
0.35	0.419	0.355	0.279	0.190	0.164	0.172	0.028	0.041	0.067	-0.006	0.010	0.028
0.45	0.391	0.330	0.278	0.129	0.128	0.150	0.010	0.025	0.045	-0.003	0.006	0.016
0.55	0.383	0.329	0.282	0.108	0.117	0.139	0.012	0.022	0.036	0.004	0.008	0.013
0.65	0.400	0.347	0.290	0.116	0.124	0.139	0.022	0.028	0.036	0.010	0.013	0.015
0.75	0.443	0.383	0.303	0.146	0.148	0.150	0.036	0.039	0.043	0.017	0.019	0.020
0.85	0.513	0.441	0.322	0.200	0.191	0.174	0.057	0.058	0.057	0.027	0.028	0.030
0.95	0.613	0.524	0.349	0.287	0.258	0.210	0.090	0.086	0.080	0.042	0.041	0.040

(d'après MILOVIC)

K_{HZ}

$\gamma = 0.15$

z/H	H/R = 1			H/R = 2			H/R = 4			H/R = 6		
	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1
0	1	1	0.5	1	1	0.5	1	1	0.5	1	1	0.5
0.05	1.004	1.000	0.485	1.001	0.993	0.478	0.971	0.937	0.453	0.912	0.856	0.427
0.15	1.012	1.007	0.477	0.981	0.944	0.452	0.838	0.753	0.395	0.664	0.582	0.339
0.25	1.017	0.989	0.467	0.921	0.840	0.425	0.634	0.549	0.331	0.410	0.361	0.251
0.35	1.016	0.957	0.457	0.832	0.732	0.397	0.459	0.403	0.274	0.258	0.236	0.185
0.45	1.006	0.918	0.447	0.734	0.637	0.372	0.338	0.305	0.226	0.175	0.165	0.139
0.55	0.988	0.880	0.439	0.644	0.560	0.348	0.259	0.239	0.189	0.128	0.122	0.108
0.65	0.964	0.842	0.430	0.569	0.498	0.326	0.207	0.194	0.161	0.099	0.096	0.087
0.75	0.935	0.807	0.418	0.509	0.449	0.307	0.173	0.164	0.141	0.081	0.079	0.073
0.85	0.903	0.775	0.414	0.460	0.410	0.290	0.149	0.143	0.125	0.069	0.068	0.064
0.95	0.869	0.742	0.406	0.420	0.376	0.273	0.132	0.127	0.113	0.061	0.059	0.056

$\gamma = 0.3$

0	1	1	0.5	1	1	0.5	1	1	0.5	1	1	0.5
0.05	1.003	1.001	0.485	1.000	0.992	0.475	0.969	0.941	0.453	0.913	0.867	0.428
0.15	1.012	1.009	0.476	0.980	0.947	0.452	0.835	0.757	0.395	0.664	0.586	0.339
0.25	1.018	0.991	0.466	0.921	0.843	0.425	0.635	0.551	0.332	0.413	0.362	0.252
0.35	1.018	0.959	0.456	0.834	0.735	0.399	0.461	0.405	0.275	0.259	0.237	0.186
0.45	1.009	0.921	0.446	0.739	0.642	0.374	0.340	0.307	0.228	0.176	0.166	0.140
0.55	0.991	0.881	0.437	0.651	0.565	0.350	0.262	0.241	0.191	0.129	0.124	0.110
0.65	0.965	0.843	0.427	0.576	0.504	0.329	0.210	0.197	0.164	0.101	0.098	0.089
0.75	0.933	0.806	0.417	0.516	0.455	0.309	0.176	0.167	0.144	0.083	0.081	0.075
0.85	0.896	0.769	0.406	0.467	0.414	0.290	0.153	0.146	0.128	0.071	0.070	0.066
0.95	0.853	0.729	0.393	0.423	0.376	0.270	0.135	0.128	0.114	0.063	0.061	0.058

$\gamma = 0.45$

0	1	1	0.5	1	1	0.5	1	1	0.5	1	1	0.5
0.05	1.010	1.001	0.472	0.991	0.990	0.459	0.958	0.940	0.440	0.901	0.868	0.418
0.15	1.010	1.018	0.462	0.981	0.954	0.437	0.829	0.755	0.385	0.658	0.580	0.330
0.25	1.021	0.994	0.455	0.922	0.841	0.417	0.632	0.542	0.327	0.412	0.353	0.248
0.35	1.027	0.960	0.447	0.839	0.734	0.395	0.459	0.401	0.273	0.255	0.233	0.185
0.45	1.020	0.922	0.438	0.745	0.645	0.374	0.339	0.307	0.229	0.173	0.165	0.141
0.55	1.002	0.885	0.429	0.661	0.573	0.353	0.263	0.244	0.195	0.129	0.125	0.111
0.65	0.976	0.848	0.420	0.592	0.516	0.334	0.215	0.203	0.169	0.103	0.100	0.091
0.75	0.943	0.811	0.408	0.536	0.470	0.315	0.184	0.175	0.150	0.086	0.085	0.079
0.85	0.901	0.771	0.395	0.488	0.430	0.295	0.161	0.154	0.134	0.075	0.074	0.069
0.95	0.850	0.726	0.381	0.443	0.388	0.272	0.144	0.135	0.119	0.068	0.065	0.061

(d'après MILOVIC)

3-2

K_Hz_r

$\gamma = 0.15$

z/H	H/R = 1			H/R = 2			H/R = 4			H/R = 6		
	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1	r/R = 0	r/R = 0.5	r/R = 1
0	0	0	--	0	0	--	0	0	--	0	0	--
0.05	0.002	-0.013	0.129	0.007	0.008	0.184	0.011	0.050	0.231	0.019	0.081	0.243
0.15	0.002	-0.006	0.189	0.019	0.075	0.248	0.036	0.138	0.237	0.039	0.133	0.193
0.25	0.004	0.023	0.199	0.031	0.123	0.232	0.039	0.126	0.173	0.028	0.082	0.112
0.35	0.008	0.050	0.190	0.036	0.131	0.200	0.029	0.087	0.120	0.016	0.043	0.065
0.45	0.013	0.068	0.175	0.035	0.118	0.165	0.019	0.057	0.082	0.009	0.025	0.039
0.55	0.016	0.078	0.158	0.030	0.098	0.134	0.012	0.037	0.056	0.005	0.015	0.024
0.65	0.018	0.082	0.142	0.024	0.078	0.107	0.008	0.025	0.038	0.003	0.009	0.015
0.75	0.019	0.083	0.130	0.018	0.062	0.085	0.006	0.017	0.026	0.002	0.006	0.010
0.85	0.019	0.084	0.123	0.014	0.050	0.071	0.004	0.012	0.019	0.001	0.004	0.007
0.95	0.020	0.088	0.124	0.011	0.046	0.066	0.003	0.010	0.016	0.001	0.003	0.006

$\gamma = 0.3$

0	0	0	--	0	0	--	0	0	--	0	0	--
0.05	0.000	-0.012	0.121	0.004	0.009	0.179	0.005	0.051	0.229	0.012	0.081	0.242
0.15	-0.001	-0.008	0.185	0.015	0.072	0.248	0.031	0.135	0.238	0.035	0.130	0.193
0.25	0.001	0.019	0.196	0.027	0.120	0.230	0.037	0.125	0.173	0.029	0.082	0.112
0.35	0.006	0.047	0.189	0.033	0.128	0.197	0.029	0.087	0.120	0.016	0.044	0.065
0.45	0.010	0.067	0.176	0.033	0.116	0.163	0.020	0.057	0.081	0.009	0.025	0.038
0.55	0.015	0.079	0.162	0.029	0.096	0.132	0.013	0.037	0.055	0.005	0.015	0.024
0.65	0.018	0.086	0.151	0.023	0.078	0.106	0.008	0.025	0.038	0.003	0.009	0.015
0.75	0.021	0.093	0.146	0.019	0.063	0.088	0.006	0.017	0.026	0.002	0.006	0.010
0.85	0.023	0.101	0.148	0.015	0.054	0.076	0.004	0.012	0.020	0.002	0.004	0.007
0.95	0.025	0.115	0.162	0.014	0.054	0.079	0.003	0.011	0.019	0.001	0.004	0.006

$\gamma = 0.45$

0	0	0	--	0	0	--	0	0	--	0	0	--
0.05	-0.003	-0.014	0.111	0.002	0.012	0.176	-0.001	0.059	0.234	0.004	0.088	0.249
0.15	-0.005	-0.015	0.175	0.009	0.067	0.245	0.023	0.127	0.235	0.029	0.121	0.189
0.25	-0.004	0.011	0.185	0.022	0.113	0.223	0.035	0.122	0.169	0.032	0.083	0.110
0.35	0.001	0.038	0.178	0.029	0.122	0.190	0.031	0.086	0.117	0.021	0.045	0.064
0.45	0.007	0.058	0.167	0.030	0.110	0.155	0.022	0.056	0.079	0.012	0.024	0.038
0.55	0.012	0.073	0.158	0.027	0.091	0.125	0.014	0.036	0.053	0.007	0.014	0.023
0.65	0.017	0.086	0.153	0.023	0.074	0.102	0.010	0.024	0.036	0.004	0.009	0.014
0.75	0.022	0.100	0.158	0.019	0.061	0.087	0.007	0.016	0.026	0.003	0.006	0.009
0.85	0.026	0.119	0.174	0.017	0.057	0.083	0.006	0.013	0.021	0.003	0.004	0.007
0.95	0.032	0.146	0.209	0.016	0.066	0.097	0.004	0.013	0.022	0.002	0.004	0.007

(d'après MILOVIC)

BIBLIOGRAPHIE

Nous publions par ailleurs un article indiquant le détail des calculs qui nous ont permis d'obtenir les coefficients M_H , M'_H , M_{Hm} et M'_{Hm} [1]. Les valeurs que nous avons obtenues pour le centre concordent avec celles publiées par Milovic [2], Poulos [3] et Ueshita et Meyerhof [4].

Les coefficients K_{Hr} , K_{Hr} et K_{Hz} ont été calculés par Milovic [2].

REFERENCES

- [1] J.P. GIROUD, "Tassement d'une fondation circulaire sur une couche de sol d'épaisseur finie", Annales des Ponts et Chaussées, 3, (1971), 123-156.
- [2] D.M. MILOVIC, "Contraintes et déplacements dans une couche élastique d'épaisseur limitée produits par une fondation circulaire", Le Génie Civil, 147, 5 (Mai 1970), 281-285.
- [3] H.G. POULOS, "Stresses and Displacements in an Elastic Layer Underlain by a Rough Rigid Base", Géotechnique, 17 (Décembre 1967), 378-410.
- [4] K. UESHITA and G.G. MEYERHOF, "Surface Displacement of an Elastic Layer Under Uniformly Distributed Loads", Highway Research Record, 228 (1968), 1-10.

**FONDATION CIRCULAIRE EXERÇANT
UNE CHARGE NORMALE UNIFORME**

(Réservoir, Radier souple)
sur un sol composé de deux couches

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul direct du tassement.
- Calcul des contraintes.
- Tables et graphiques.
- Bibliographie

DEFINITION DU SOL

La couche supérieure a pour épaisseur H . Elle est homogène et le sol qui la constitue a pour module d'Young, E_1 , et pour coefficient de Poisson, ν_1 . Elle adhère parfaitement à la couche inférieure dont le module d'Young est E_2 et le coefficient de Poisson, ν_2 (Fig. 1).

DEFINITION DE LA CHARGE

La charge est constituée par une pression uniforme, p , exercée sur un cercle de rayon R à la surface du sol (Fig. 1). Cette charge est à peu près celle d'un *radier souple* (de grandes dimensions) ou d'un *réservoir de pétrole*.

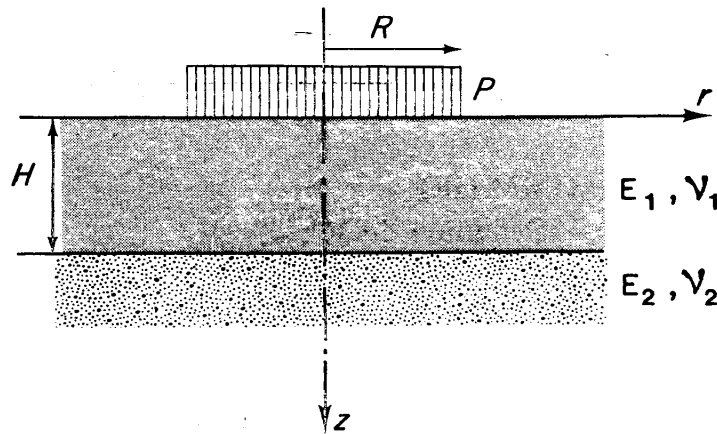


FIG. 1. — Définition du sol et de la charge.

CALCUL DIRECT DU TASSEMENT

Le tassement du centre du cercle se calcule indifféremment par l'une des deux formules :

$$(1) \quad w = \frac{pR}{E_1} M_{2H_1} \qquad (2) \quad w = \frac{pR}{E_2} M_{2H_2}$$

avec :

w : tassement du centre du cercle,

p : contrainte normale uniformément répartie sur le cercle,

R : rayon de la fondation circulaire,

- E_1 : module d'Young du sol de la couche supérieure,
 E_2 : module d'Young du sol de la couche inférieure,
 M_{2H1} et M_{2H2} : coefficients sans dimensions donnés dans les tables en fonction de ν_1 , ν_2 , E_1/E_2 et H/R ,
 ν_1 : coefficient de Poisson du sol de la couche supérieure,
 ν_2 : coefficient de Poisson du sol de la couche inférieure,
 H : épaisseur de la couche supérieure du sol.

Bien qu'elles soient équivalentes, nous avons donné deux formules, car :

- la première est plus commode pour H/R grand et E_1/E_2 petit,
- la seconde est plus commode dans les cas inverses.

Les coefficients M_{2H1} et M_{2H2} ont été calculés pour les valeurs suivantes du coefficient de Poisson :

$$\begin{array}{lll} \nu_1 = \nu_2 = 0,25 ; & \nu_1 = 0,25 \text{ et } \nu_2 = 0,5 , & \\ \nu_1 = \nu_2 = 0,3 ; & \nu_1 = \nu_2 = 0,35 ; & \nu_1 = \nu_2 = 0,5 . \end{array}$$

Exemple 1 :

Considérons un réservoir de pétrole de 18 m (59 ft) de rayon exerçant à la surface une charge normale uniforme de 0,8 bar (1 670 lb/sq.ft). La couche supérieure a pour épaisseur $H = 27$ m (89 ft) et pour module d'Young $E_1 = 170$ bars (355 000 lb/sq.ft). La couche inférieure a une épaisseur très grande et un module de 34 bars (71 000 lb/sq.ft). Le coefficient de Poisson des deux couches est égal à 0,3. Quel est le tassement du centre du réservoir ?

Pour $H/R = 1,5$ et $E_1/E_2 = 5$, les tables donnent :

$$M_{2H1} = 2,96 \quad \text{et} \quad M_{2H2} = 0,59 .$$

D'où :

$$w = \frac{0,8 \times 18}{170} \times 2,96 = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm} = \frac{0,8 \times 18}{34} \times 0,59 = 0,25 \text{ m} ,$$

$$w = \frac{1\,670 \times 59}{355\,000} \times 2,96 = 0,82 \text{ ft} = 10 \text{ in} = \frac{1\,670 \times 59}{71\,000} \times 0,59 = 0,82 \text{ ft} .$$

CALCUL DES CONTRAINTES

Les contraintes sur l'axe de la charge ($r = 0, z$) sont données dans les tables et graphiques ci-après, correspondant aux cas suivants :

$$-v_1 = v_2 = 0,3 .$$

Cinq tables, pour $H/R = 0,25, 0,5, 1, 1,5$ et 3 , avec pour chaque table $E_1/E_2 = 0, 0,001, 0,01, 0,1, 10, 100, 1\ 000$.

$$-v_1 = v_2 = 0,5 .$$

Une table donnant uniquement les contraintes à l'interface ($z = H$) avec :

σ_z : contrainte verticale,

σ_{r1} : contrainte horizontale dans la couche 1,

σ_{r2} : contrainte horizontale dans la couche 2.

Un graphique donnant σ_z à l'interface pour toute valeur de R/H .

Un graphique donnant σ_z à toute profondeur pour le seul cas $H = R$.

Exemple 2 :

Reprenons l'exemple précédent et calculons la contrainte σ_z à la verticale du centre du réservoir, à mi-hauteur de la première couche.

Pour $z/H = 0,5$ (mi-hauteur de la première couche), la table relative à $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ donne :

$$\sigma_z = 0,7 p \text{ (en interpolant entre } E_1/E_2 = 1 \text{ et } E_1/E_2 = 10) .$$

D'où :

$$\sigma_z = 0,8 \times 0,7 = 0,56 \text{ bar} = 1\,670 \times 0,7 = 1\,170 \text{ lb/sq.ft.}$$

TABLES ET GRAPHIQUES- Calcul du tassement :

Tables de M_{2H_1} et M_{2H_2} pour : $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$; $\nu_1 = 0,25$ et $\nu_2 = 0,5$;

$\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,35$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$: (pp. 244 à 253).

- Calcul des contraintes :

Table de σ_z/p pour $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$: p. 254.

Table de σ_z/p et σ_r/p pour $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$: p. 255.

Graphique de σ_z/p pour $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$: p. 256.



$$\nu_1 = \nu_2 = 0.25$$

H/R	E ₁ /E ₂						
	0	1	2	5	10	20	50
0	0	1.88	3.8	9.4	18.8	37.5	94
0.1	0.09	1.88	3.6	8.7	17.2	33.5	80
0.2	0.17	1.88	3.5	8.0	15.8	29.8	68
0.3	0.25	1.88	3.3	7.4	14.3	26.2	58
0.4	0.34	1.88	3.2	7.1	12.7	24.0	51
0.5	0.44	1.88	3.1	6.5	11.8	20.7	43
0.6	0.53	1.88	3.0	6.2	10.9	18.7	37
0.7	0.62	1.88	2.9	5.8	9.9	16.7	34
0.8	0.71	1.88	2.8	5.5	9.1	15.0	30
0.9	0.79	1.88	2.8	5.2	8.5	14.0	28
1	0.86	1.88	2.7	4.9	7.9	13.0	25
1.1	0.93	1.88	2.6	4.7	7.5	12.0	22
1.2	0.99	1.88	2.6	4.5	7.0	11.2	21
1.3	1.04	1.88	2.5	4.3	6.7	10.5	20
1.4	1.09	1.88	2.45	4.1	6.4	10.0	18.6
1.5	1.14	1.88	2.4	4.0	6.1	9.4	18
1.6	1.18	1.88	2.4	3.9	5.9	9.0	16.4
1.7	1.22	1.88	2.4	3.8	5.6	8.6	16
1.8	1.25	1.88	2.35	3.7	5.4	8.2	15
1.9	1.28	1.88	2.3	3.6	5.2	7.9	14
2	1.31	1.88	2.3	3.6	5.1	7.6	13.9
2.2	1.35	1.88	2.3	3.4	4.8	7.1	13
2.4	1.39	1.88	2.3	3.3	4.5	6.6	12
2.5	1.41	1.88	2.2	3.2	4.4	6.4	11.5
3	1.49	1.88	2.2	3.0	4.1	5.8	9.9
3.5	1.55	1.88	2.2	2.8	3.9	5.3	9.0
4	1.59	1.88	2.1	2.7	3.7	4.9	8.1
5	1.65	1.88	2.1	2.6	3.2	4.2	6.8
10	1.75	1.88	2.0	2.3	2.6	3.0	4.2
∞	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88

(d'après MANDEL)



$$\nu_1 = \nu_2 = 0.25$$

H/R	E ₁ /E ₂						
	0	1	2	5	10	20	50
0	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88
0.1	1.88	1.80	1.74	1.72	1.68	1.68	1.60
0.2	1.88	1.75	1.60	1.58	1.49	1.49	1.36
0.3	1.88	1.65	1.48	1.43	1.31	1.31	1.16
0.6	1.88	1.60	1.42	1.27	1.20	1.20	1.02
0.5	1.88	1.55	1.30	1.18	1.04	1.04	0.86
0.6	1.88	1.50	1.24	1.09	0.94	0.94	0.74
0.7	1.88	1.45	1.16	0.99	0.84	0.84	0.68
0.8	1.88	1.40	1.10	0.91	0.75	0.75	0.60
0.9	1.88	1.40	1.04	0.85	0.70	0.70	0.56
1	1.88	1.35	0.98	0.79	0.65	0.65	0.50
1.1	1.88	1.30	0.94	0.75	0.60	0.60	0.44
1.2	1.88	1.30	0.90	0.70	0.56	0.56	0.42
1.3	1.88	1.25	0.86	0.67	0.53	0.53	0.40
1.4	1.88	1.23	0.82	0.64	0.50	0.50	0.37
1.5	1.88	1.20	0.80	0.61	0.47	0.47	0.36
1.6	1.88	1.20	0.78	0.59	0.45	0.45	0.33
1.7	1.88	1.20	0.76	0.56	0.43	0.43	0.32
1.8	1.88	1.18	0.74	0.54	0.41	0.41	0.30
1.9	1.88	1.15	0.72	0.52	0.40	0.40	0.28
2	1.88	1.15	0.72	0.51	0.38	0.38	0.28
2.2	1.88	1.15	0.68	0.48	0.36	0.36	0.26
2.4	1.88	1.15	0.66	0.45	0.33	0.33	0.24
2.5	1.88	1.10	0.64	0.44	0.32	0.32	0.23
3	1.88	1.10	0.60	0.41	0.29	0.29	0.20
3.5	1.88	1.10	0.56	0.39	0.27	0.27	0.18
4	1.88	1.05	0.54	0.37	0.25	0.25	0.16
5	1.88	1.05	0.52	0.32	0.21	0.21	0.14
10	1.88	1.00	0.46	0.26	0.15	0.15	0.08
∞	1.88	0.94	0.38	0.19	0.09	0.09	0.04

(d'après MANDEL)





$$\nu_1 = 0.25$$

$$\nu_2 = 0.5$$

H/R	E ₁ /E ₂						
	0	1	2	5	10	20	30
0	0	1.5	3.0	7.5	15	30	45
0.1	0.09	1.51	3.02	7.8	15.2	29.8	44.3
0.2	0.17	1.53	3.05	7.7	15.2	29.1	43.2
0.3	0.25	1.57	3.05	7.4	14.3	27.5	40.5
0.4	0.34	1.63	3.02	6.9	12.9	23.4	33.5
0.5	0.44	1.67	2.97	6.4	11.6	20.0	28.5
0.6	0.53	1.73	2.90	6.0	10.6	18.0	24.5
0.7	0.62	1.78	2.85	5.5	9.7	16.0	21.5
0.8	0.71	1.82	2.79	5.2	9.0	14.6	19.5
0.9	0.79	1.84	2.74	4.9	8.4	13.4	18.0
1	0.86	1.86	2.69	4.7	7.9	12.5	16.8
1.1	0.93	1.87	2.63	4.5	7.4	11.5	15.7
1.2	0.99	1.87	2.59	4.3	7.0	10.9	14.8
1.3	1.04	1.88	2.54	4.2	6.6	10.3	14.0
1.4	1.09	1.88	2.51	4.1	6.3	9.7	13.2
1.5	1.14	1.88	2.47	4.0	6.0	9.2	12.5
1.6	1.18	1.88	2.45	3.9	5.7	8.8	11.8
1.7	1.22	1.88	2.42	3.7	5.5	8.4	11.3
1.8	1.25	1.88	2.39	3.6	5.3	8.1	10.8
1.9	1.28	1.88	2.37	3.5	5.2	7.7	10.4
2	1.31	1.88	2.35	3.5	5.1	7.4	10.0
2.2	1.35	1.88	2.31	3.3	4.8	6.9	9.3
2.4	1.39	1.88	2.28	3.2	4.6	6.4	8.6
2.5	1.41	1.88	2.27	3.1	4.5	6.2	8.3
3	1.49	1.88	2.21	3.0	4.1	5.5	7.3
3.5	1.55	1.88	2.17	2.9	3.9	5.1	6.6
4	1.59	1.88	2.13	2.7	3.7	4.7	6.0
5	1.65	1.88	2.08	2.5	3.2	4.0	5.0
10	1.75	1.88	1.98	2.2	2.5	3.0	3.5
∞	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88

(d'après MANDEL)



$$\nu_1 = 0.25$$

$$\nu_2 = 0.5$$

H/R	E ₁ /E ₂						
	0	1	2	5	10	20	30
0	∞	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50
0.1	∞	1.51	1.51	1.56	1.52	1.49	1.48
0.2	∞	1.53	1.53	1.54	1.52	1.46	1.44
0.3	∞	1.57	1.53	1.48	1.43	1.38	1.35
0.4	∞	1.63	1.51	1.38	1.29	1.17	1.12
0.5	∞	1.67	1.49	1.28	1.16	1.00	0.95
0.6	∞	1.73	1.45	1.20	1.06	0.90	0.82
0.7	∞	1.78	1.43	1.10	0.97	0.80	0.72
0.8	∞	1.82	1.40	1.04	0.90	0.73	0.65
0.9	∞	1.84	1.37	0.98	0.84	0.67	0.60
1	∞	1.86	1.35	0.94	0.79	0.63	0.56
1.1	∞	1.87	1.32	0.90	0.74	0.58	0.52
1.2	∞	1.87	1.30	0.86	0.70	0.55	0.49
1.3	∞	1.88	1.27	0.84	0.66	0.52	0.47
1.4	∞	1.88	1.26	0.82	0.63	0.49	0.44
1.5	∞	1.88	1.24	0.80	0.60	0.46	0.42
1.6	∞	1.88	1.23	0.78	0.57	0.44	0.39
1.7	∞	1.88	1.21	0.74	0.55	0.42	0.38
1.8	∞	1.88	1.20	0.72	0.53	0.41	0.36
1.9	∞	1.88	1.19	0.70	0.52	0.39	0.35
2	∞	1.88	1.18	0.70	0.51	0.37	0.33
2.2	∞	1.88	1.16	0.66	0.48	0.35	0.31
2.4	∞	1.88	1.14	0.64	0.46	0.32	0.29
2.5	∞	1.88	1.14	0.62	0.45	0.31	0.28
3	∞	1.88	1.11	0.60	0.41	0.28	0.24
3.5	∞	1.88	1.09	0.58	0.39	0.26	0.22
4	∞	1.88	1.07	0.54	0.37	0.24	0.20
5	∞	1.88	1.04	0.50	0.32	0.20	0.17
10	∞	1.88	0.99	0.44	0.25	0.15	0.12
∞	∞	1.88	0.94	0.38	0.19	0.09	0.06

(d'après MANDEL)



$$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

H/R	E ₁ /E ₂												
	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50
0	0	0.018	0.036	0.091	0.182	0.364	0.91	1.82	3.64	9.10	18.2	36.4	91
0.1	0.074	0.08	0.12	0.18	0.28	0.46	0.99	1.82	3.50	8.5	16.8	32.5	77
0.2	0.149	0.17	0.20	0.26	0.36	0.55	1.06	1.82	3.40	7.9	15.3	29	64
0.3	0.224	0.25	0.28	0.35	0.45	0.64	1.12	1.82	3.25	7.4	13.9	25.5	55
0.4	0.308	0.34	0.37	0.43	0.54	0.73	1.18	1.82	3.15	7.0	12.6	23.5	48
0.5	0.395	0.425	0.45	0.52	0.63	0.82	1.24	1.82	3.10	6.5	11.7	20.5	42
0.6	0.486	0.51	0.53	0.60	0.71	0.90	1.29	1.82	3.00	6.15	10.8	18.5	36
0.7	0.573	0.59	0.62	0.68	0.80	0.97	1.34	1.82	2.9	5.75	9.85	16.7	33
0.8	0.654	0.67	0.70	0.76	0.87	1.04	1.39	1.82	2.8	5.45	9.1	15	30
0.9	0.730	0.75	0.775	0.85	0.95	1.11	1.43	1.82	2.75	5.15	8.5	14	27
1	0.800	0.82	0.85	0.93	1.02	1.17	1.47	1.82	2.7	4.9	7.9	13	24.5
1.1	0.866	0.88	0.92	1.00	1.08	1.22	1.51	1.82	2.6	4.65	7.4	12	22
1.2	0.924	0.96	1.00	1.07	1.15	1.27	1.53	1.82	2.55	4.45	7.0	11.1	21
1.3	0.980	1.015	1.07	1.13	1.20	1.31	1.56	1.82	2.5	4.25	6.65	10.4	19.5
1.4	1.029	1.07	1.12	1.19	1.25	1.35	1.58	1.82	2.45	4.1	6.3	9.8	18.3
1.5	1.072	1.12	1.17	1.24	1.30	1.39	1.60	1.82	2.4	4.0	6.0	9.3	17.5
1.6	1.112	1.16	1.22	1.28	1.34	1.42	1.62	1.82	2.4	3.85	5.7	8.9	16.2
1.7	1.148	1.20	1.26	1.32	1.37	1.44	1.64	1.82	2.4	3.75	5.4	8.5	15.5
1.8	1.182	1.24	1.29	1.35	1.40	1.47	1.65	1.82	2.35	3.65	5.2	8.1	14.7
1.9	1.212	1.27	1.32	1.38	1.43	1.49	1.66	1.82	2.3	3.55	5.1	7.8	13.7
2	1.236	1.32	1.36	1.41	1.45	1.51	1.67	1.82	2.3	3.5	5.0	7.5	13.5
2.2	1.292	1.37	1.40	1.45	1.49	1.55	1.68	1.82	2.3	3.35	4.7	7.0	12.5
2.4	1.334	1.40	1.44	1.48	1.53	1.59	1.70	1.82	2.25	3.25	4.5	6.5	11.5
2.5	1.348	1.43	1.46	1.51	1.55	1.60	1.71	1.82	2.2	3.15	4.4	6.4	11.2
3	1.426	1.50	1.53	1.57	1.60	1.65	1.74	1.82	2.2	2.95	4.1	5.8	9.8
3.5	1.484	1.54	1.57	1.60	1.64	1.68	1.76	1.82	2.15	2.8	3.8	5.3	8.8
4	1.530	1.58	1.60	1.64	1.67	1.71	1.77	1.82	2.10	2.7	3.6	4.9	7.9
5	1.590	1.64	1.66	1.69	1.71	1.74	1.78	1.82	2.05	2.5	3.1	4.1	6.6
10	1.710	1.725	1.74	1.75	1.77	1.78	1.80	1.82	1.95	2.2	2.5	3.0	4.1
∞	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82





$$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

H/R	E ₁ /E ₂												
	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50
0	∞	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82
0.1	∞	8	6	3.6	2.8	2.3	1.98	1.82	1.75	1.70	1.68	1.63	1.54
0.2	∞	17	10	5.2	3.6	2.75	2.12	1.82	1.70	1.58	1.53	1.45	1.28
0.3	∞	25	14	7.0	4.5	3.2	2.24	1.82	1.63	1.48	1.39	1.28	1.10
0.4	∞	34	18.5	8.6	5.4	3.65	2.36	1.82	1.58	1.40	1.26	1.18	0.96
0.5	∞	42.5	22.5	10.4	6.3	4.1	2.48	1.82	1.55	1.30	1.17	1.03	0.84
0.6	∞	51	26.5	12	7.1	4.5	2.58	1.82	1.50	1.23	1.08	0.93	0.72
0.7	∞	59	31	13.6	8.1	4.85	2.68	1.82	1.45	1.15	0.99	0.84	0.66
0.8	∞	67	35	15.2	8.7	5.2	2.78	1.82	1.40	1.09	0.91	0.75	0.60
0.9	∞	75	38.75	17	9.5	5.55	2.86	1.82	1.38	1.03	0.85	0.70	0.54
1	∞	82	42.5	18.5	10.2	5.85	2.94	1.82	1.35	0.98	0.79	0.65	0.49
1.1	∞	88	46.25	20	10.8	6.1	3.02	1.82	1.30	0.93	0.74	0.60	0.44
1.2	∞	96	50	21.4	11.5	6.35	3.06	1.82	1.28	0.89	0.70	0.56	0.42
1.3	∞	101.5	53.5	22.6	12	6.55	3.12	1.82	1.25	0.85	0.67	0.52	0.39
1.4	∞	107	56	23.8	12.5	6.75	3.16	1.82	1.23	0.82	0.63	0.49	0.37
1.5	∞	112	58.5	24.8	13	6.95	3.20	1.82	1.20	0.80	0.60	0.47	0.35
1.6	∞	116	61	25.6	13.4	7.10	3.24	1.82	1.20	0.77	0.57	0.45	0.32
1.7	∞	120	63	26.4	13.7	7.2	3.28	1.82	1.20	0.75	0.54	0.43	0.31
1.8	∞	124	64.5	27	14	7.35	3.30	1.82	1.18	0.73	0.52	0.41	0.29
1.9	∞	127	66	27.6	14.3	7.45	3.32	1.82	1.15	0.71	0.51	0.39	0.27
2	∞	132	68	28.2	14.5	7.55	3.35	1.82	1.15	0.70	0.50	0.38	0.27
2.2	∞	137	70	29	14.9	7.75	3.36	1.82	1.15	0.67	0.47	0.35	0.25
2.4	∞	140	72	29.6	15.3	7.95	3.41	1.82	1.13	0.65	0.45	0.33	0.23
2.5	∞	143	73.25	30.2	15.5	8.025	3.42	1.82	1.10	0.63	0.44	0.32	0.22
3	∞	150	76.5	31.4	16	8.25	3.48	1.82	1.10	0.59	0.41	0.29	0.20
3.5	∞	154	78.5	32.1	16.4	8.425	3.52	1.82	1.08	0.56	0.38	0.27	0.18
4	∞	158	80	32.8	16.7	8.55	3.54	1.82	1.05	0.54	0.36	0.25	0.16
5	∞	164	83	33.8	17.1	8.7	3.56	1.82	1.03	0.50	0.31	0.21	0.13
10	∞	172.5	87	35.1	17.7	8.925	3.60	1.82	0.98	0.44	0.25	0.15	0.08
∞	∞	182	91	36.4	18.2	9.1	3.64	1.82	0.91	0.36	0.18	0.09	0.04





$$\nu_1 = \nu_2 = 0.35$$

H/R	E ₁ /E ₂						
	0	1	2	5	10	20	50
0	0	1.76	3.52	8.80	17.6	35.2	88.0
0.1	0.06	1.76	3.4	8.3	16.3	31.5	74
0.2	0.12	1.76	3.3	7.8	14.9	28	62
0.3	0.19	1.76	3.2	7.4	13.7	25	53
0.4	0.27	1.76	3.1	6.9	12.5	23	46
0.5	0.34	1.76	3.05	6.5	11.5	20	41
0.6	0.43	1.76	3.0	6.1	10.7	18.3	36
0.7	0.50	1.76	2.9	5.7	9.8	16.7	32
0.8	0.59	1.76	2.8	5.4	9.1	15	29
0.9	0.66	1.76	2.75	5.1	8.5	14	26
1	0.74	1.76	2.7	4.9	7.9	13	24
1.1	0.80	1.76	2.6	4.6	7.4	12	22
1.2	0.86	1.76	2.5	4.4	7.0	11.1	21
1.3	0.91	1.76	2.5	4.2	6.6	10.4	19
1.4	0.95	1.76	2.45	4.1	6.2	9.7	18
1.5	1.00	1.76	2.4	4.0	5.9	9.2	17
1.6	1.04	1.76	2.4	3.8	5.6	8.8	16
1.7	1.08	1.76	2.4	3.7	5.3	8.4	15
1.8	1.11	1.76	2.35	3.6	5.1	8.0	14.5
1.9	1.14	1.76	2.3	3.5	5.0	7.7	13.5
2	1.17	1.76	2.3	3.4	4.9	7.4	13.0
2.2	1.22	1.76	2.25	3.3	4.6	6.9	12
2.4	1.26	1.76	2.2	3.2	4.5	6.5	11.5
2.5	1.28	1.76	2.2	3.1	4.4	6.4	11
3	1.36	1.76	2.1	2.9	4.0	5.8	9.7
3.5	1.41	1.76	2.1	2.8	3.7	5.3	8.7
4	1.46	1.76	2.05	2.7	3.5	4.9	7.8
5	1.52	1.76	1.96	2.45	3.09	4.1	6.42
10	1.64	1.76	1.86	2.10	2.43	2.94	4.09
∞	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76

(d'après JONES)



$$\nu_1 = \nu_2 = 0.35$$

H/R	E ₁ /E ₂						
	0	1	2	5	10	20	50
0	8	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76
0.1	8	1.76	1.70	1.66	1.63	1.58	1.48
0.2	8	1.76	1.65	1.56	1.49	1.40	1.24
0.3	8	1.76	1.60	1.48	1.37	1.25	1.06
0.4	8	1.76	1.55	1.38	1.25	1.15	0.92
0.5	8	1.76	1.53	1.30	1.15	1.00	0.82
0.6	8	1.76	1.50	1.22	1.07	0.92	0.72
0.7	8	1.76	1.45	1.14	0.98	0.84	0.64
0.8	8	1.76	1.40	1.08	0.91	0.75	0.58
0.9	8	1.76	1.38	1.02	0.85	0.70	0.52
1	8	1.76	1.35	0.98	0.79	0.65	0.48
1.1	8	1.76	1.30	0.92	0.74	0.60	0.44
1.2	8	1.76	1.25	0.88	0.70	0.56	0.42
1.3	8	1.76	1.25	0.84	0.66	0.52	0.38
1.4	8	1.76	1.23	0.82	0.62	0.49	0.36
1.5	8	1.76	1.20	0.80	0.59	0.46	0.34
1.6	8	1.76	1.20	0.76	0.56	0.44	0.32
1.7	8	1.76	1.20	0.74	0.53	0.42	0.30
1.8	8	1.76	1.18	0.72	0.51	0.40	0.29
1.9	8	1.76	1.15	0.70	0.50	0.39	0.27
2	8	1.76	1.15	0.68	0.49	0.37	0.26
2.2	8	1.76	1.13	0.66	0.46	0.35	0.24
2.4	8	1.76	1.10	0.64	0.45	0.33	0.23
2.5	8	1.76	1.10	0.62	0.44	0.32	0.22
3	8	1.76	1.05	0.58	0.40	0.29	0.19
3.5	8	1.76	1.05	0.56	0.37	0.27	0.17
4	8	1.76	1.03	0.54	0.35	0.25	0.16
5	8	1.76	0.98	0.49	0.31	0.21	0.13
10	8	1.76	0.93	0.42	0.24	0.15	0.08
∞	8	1.76	0.88	0.35	0.18	0.09	0.04

(d'après JONES)



$$\nu_1 = \nu_2 = 0.5$$

H/R	E_1/E_2													
	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
0	8	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
0.1	8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.58	1.52	1.5	1.50	1.50	1.49	1.48	1.44	1.40
0.2	8	2.1	2.0	1.8	1.8	1.65	1.56	1.5	1.49	1.47	1.45	1.41	1.26	1.15
0.3	8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.75	1.60	1.5	1.48	1.42	1.35	1.24	1.08	0.94
0.4	8	5.2	4.0	3.0	2.3	1.90	1.64	1.5	1.44	1.33	1.23	1.09	0.90	0.78
0.5	8	12	7.5	4.2	2.8	2.10	1.68	1.5	1.39	1.24	1.13	0.97	0.75	0.64
0.6	8	19	11	5.3	3.3	2.30	1.74	1.5	1.35	1.14	1.02	0.85	0.66	0.55
0.7	8	27	14.5	6.6	3.8	2.55	1.80	1.5	1.31	1.08	0.94	0.76	0.60	0.48
0.8	8	33	17.5	7.8	4.5	2.80	1.84	1.5	1.26	1.02	0.87	0.69	0.53	0.43
0.9	8	39	20.5	9.0	5.1	3.10	1.88	1.5	1.23	0.96	0.79	0.63	0.49	0.38
1	8	46	23.5	11.0	5.6	3.40	1.96	1.5	1.20	0.90	0.74	0.60	0.45	0.36
1.1	8	52	26	11.4	6.2	3.60	2.00	1.5	1.18	0.86	0.68	0.55	0.40	0.33
1.2	8	58	30	12.6	6.8	3.85	2.10	1.5	1.16	0.84	0.65	0.53	0.38	0.30
1.3	8	63	32.5	13.4	7.2	4.10	2.14	1.5	1.15	0.80	0.62	0.49	0.35	0.28
1.4	8	69	35	14.2	7.7	4.30	2.24	1.5	1.12	0.77	0.59	0.47	0.33	0.26
1.5	8	74	37.5	15.8	8.2	4.50	2.30	1.5	1.10	0.74	0.56	0.44	0.31	0.24
1.6	8	79	40	16.4	8.6	4.70	2.32	1.5	1.07	0.72	0.54	0.41	0.29	0.23
1.7	8	83	42	17.6	9.0	4.85	2.34	1.5	1.05	0.69	0.50	0.40	0.28	0.22
1.8	8	87	44	18.4	9.5	5.00	2.36	1.5	1.03	0.66	0.49	0.38	0.26	0.20
1.9	8	91	46	18.8	9.7	5.15	2.40	1.5	1.02	0.65	0.48	0.37	0.25	0.19
2	8	94	47.5	19.2	9.9	5.25	2.46	1.5	1.00	0.64	0.46	0.35	0.24	0.18
2.2	8	99	50	20.2	10.4	5.5	2.54	1.5	0.97	0.61	0.43	0.33	0.22	0.16
2.4	8	102	51.5	21.0	10.8	5.7	2.60	1.5	0.95	0.58	0.41	0.32	0.21	0.16
2.5	8	103	52	21.4	11.0	5.8	2.64	1.5	0.93	0.56	0.38	0.31	0.20	0.15
3	8	111	55.5	22.6	11.7	6.1	2.70	1.5	0.90	0.50	0.35	0.28	0.18	0.13
3.5	8	114	57	23.2	11.9	6.2	2.72	1.5	0.87	0.47	0.32	0.25	0.16	0.12
4	8	118	59	24.0	12.2	6.3	2.76	1.5	0.85	0.45	0.30	0.22	0.14	0.10
5	8	125	62.5	25.2	12.6	6.4	2.78	1.5	0.83	0.42	0.28	0.20	0.12	0.086
10	8	139	69.5	27.8	14.0	7.0	2.88	1.5	0.82	0.40	0.25	0.15	0.08	0.045
8	8	150	75	30	15	7.5	3	1.5	0.75	0.3	0.15	0.075	0.03	0.015



σ_z/P		$r = 0$								$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$	
		E_1/E_2									
z/H		0	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000		
$H/R = 0.25$	0	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.986	0.7	0.2	0.0		
	2		0.9	0.9	0.9	0.911	0.6	0.2	0.0		
	4		0.6	0.6	0.6	0.647	0.4	0.1	0.0		
	6		0.4	0.4	0.4	0.424	0.2	0.1	0.0		
$H/R = 0.5$	0	1	1	1	1	1	1	1	1		
	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.986	0.95	0.9	0.8		
	1	1.0	1.0	1.0	0.95	0.911	0.6	0.2	0.0		
	2		0.7	0.7	0.7	0.647	0.4	0.1	0.0		
3		0.5	0.5	0.45	0.424	0.3	0.0	0.0			
$H/R = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1		
	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.911	0.8	0.8	0.7		
	1	0.9	0.9	0.9	0.8	0.647	0.3	0.1	0.0		
$H/R = 1.5$	0	1	1	1	1	1	1	1	1		
	0.5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.784	0.6	0.6	0.6		
	1	0.8	0.8	0.7	0.7	0.424	0.2	0.05	0.0		
$H/R = 3$	0	1	1	1	1	1	1	1	1		
	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.424	0.3	0.3	0.3		
	1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.146	0.1	0.0	0.0		

(d'après BOULON, JELINEK et RANKE)

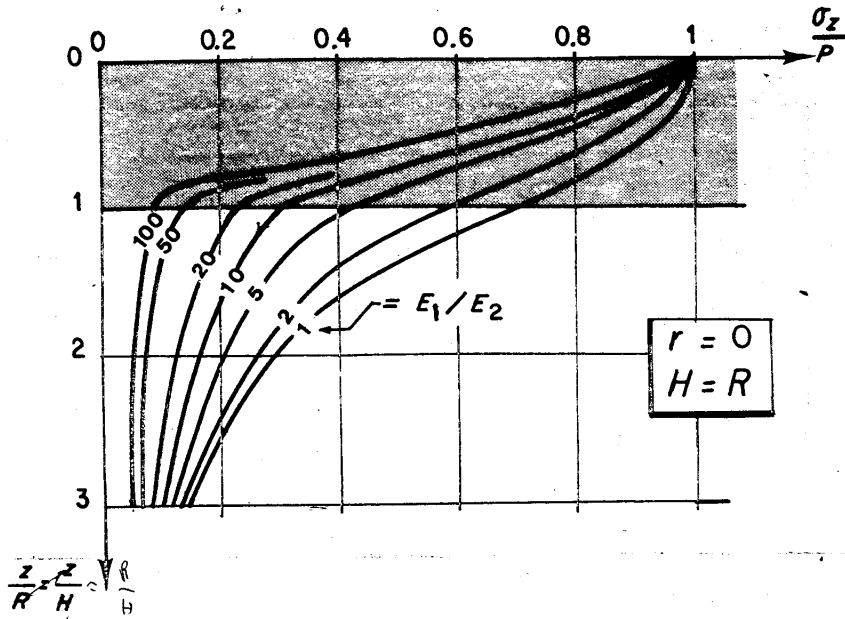
$r = 0$ $z = H$ $\nu_1 = \nu_2 = 0.5$

R/H	H/R	$E_1/E_2 = 1$			$E_1/E_2 = 2$			$E_1/E_2 = 3$		
		σ_z/P	σ_{r2}/P	σ_{r1}/P	σ_z/P	σ_{r2}/P	σ_{r1}/P	σ_z/P	σ_{r2}/P	σ_{r1}/P
1	1	0.647	0.116	0.116	0.547	0.123	-0.301	0.463	0.123	-0.671
0.9	1.11	0.589	0.090	0.090	0.491	0.098	-0.295	0.411	0.099	-0.630
0.8	1.25	0.524	0.067	0.067	0.430	0.075	-0.280	0.355	0.077	-0.574
0.7	1.43	0.450	0.046	0.046	0.364	0.054	-0.255	0.298	0.057	-0.505
0.6	1.67	0.370	0.029	0.029	0.295	0.037	-0.221	0.238	0.040	-0.424
0.5	2	0.285	0.017	0.017	0.224	0.023	-0.178	0.180	0.026	-0.333
0.4	2.5	0.200	0.008	0.008	0.156	0.013	-0.130	0.124	0.015	-0.237
0.3	3.33	0.121	0.003	0.003	0.094	0.006	-0.081	0.074	0.008	-0.145
0.2	5	0.057	0.000	0.000	0.044	0.002	-0.039	0.034	0.003	-0.069
0.1	10	0.015	0.000	0.000	0.011	0.001	-0.010	0.009	0.001	-0.018

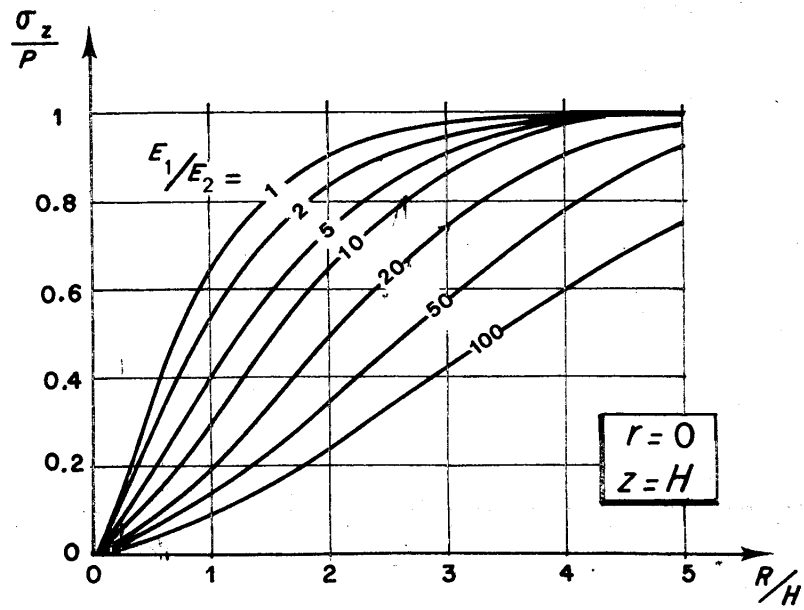
R/H	H/R	$E_1/E_2 = 10$			$E_1/E_2 = 20$			$E_1/E_2 = 100$		
		σ_z/P	σ_{r2}/P	σ_{r1}/P	σ_z/P	σ_{r2}/P	σ_{r1}/P	σ_z/P	σ_{r2}/P	σ_{r1}/P
1	1	0.292	0.105	-1.579	0.205	0.086	-2.178	0.081	0.045	-3.52
0.9	1.11	0.252	0.085	-1.424	0.175	0.070	-1.93	0.068	0.037	-3.04
0.8	1.25	0.213	0.067	-1.249	0.146	0.055	-1.67	0.055	0.029	-2.57
0.7	1.43	0.174	0.051	-1.061	0.118	0.042	-1.40	0.044	0.022	-2.10
0.6	1.67	0.136	0.037	-0.862	0.091	0.031	-1.12	0.033	0.016	-1.64
0.5	2	0.101	0.025	-0.657	0.067	0.021	-0.844	0.024	0.011	-1.22
0.4	2.5	0.068	0.016	-0.458	0.045	0.013	-0.582	0.016	0.007	-0.82
0.3	3.33	0.040	0.009	-0.276	0.026	0.007	-0.348	0.009	0.004	-0.49
0.2	5	0.019	0.004	-0.130	0.012	0.003	-0.162	0.004	0.002	-0.23
0.1	10	0.005	0.001	-0.033	0.003	0.001	-0.040	0.001	0.000	-0.06

(d'après HANK et SCRIVNER)

3-3



$\nu_1 = \nu_2 = 0.5$



(d'après BURMISTER)

BIBLIOGRAPHIE

Pour le calcul direct du tassement, nous avons obtenu les tableaux relatifs à $\nu_1 = 0,25$ et $\nu_2 = 0,25$ et $0,5$ à partir des calculs faits par Mandel [8]. Nous avons établi les tableaux relatifs à $\nu_1 = \nu_2 = 0,35$ à partir des valeurs calculées par Jones [6]. Les tableaux relatifs à $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ont été établis par interpolation entre les tableaux précédents ainsi qu'à l'aide de quelques valeurs données par Boulon [1] et de valeurs que nous avons calculées nous même. Les tableaux relatifs à $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$ ont été obtenus à partir de valeurs calculées par Burmister [2], Ueshita et Meyerhof [9] et nous-même.

Pour les contraintes, les tableaux relatifs à $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ont été déduits de calculs faits par Boulon [1] et Jelinek et Ranke [5]. Pour $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$, les graphiques sont dus à Burmister [3] et les tableaux à Hank et Scrivner [4]. Signalons que Kezdi [7] a également donné quelques valeurs en bon accord avec celles données ici.

Notons enfin que Westmann [10,11] a également calculé les contraintes et les déplacements dans le cas d'une charge tangentielle uniformément répartie sur un cercle. Ces résultats ne sont pas reproduits ici.

REFERENCES

- [1] M. BOULON, "Etude numérique de problèmes axisymétriques, en élasticité linéaire et en élasto-plasticité, en milieux homogène et hétérogène", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Grenoble (1970).
- [2] D.M. BURMISTER, "The general Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems", Journal of Applied Physics, 16, 2 (February 1945), 89-94.
- [3] D.M. BURMISTER, "Problems of Analysis of Stresses Imposed by Foundation Loads in Soils Supporting Structures", Trans. New York Acad. of Sciences, 2, 17, 5 (March 1955), 407-417.
- [4] R.J. HANK and F.H. SCRIVNER, "Some Numerical Solutions of Stresses in two and three layered Systems", Proc. Highway Research Board 28th Annual Meeting (1948), 457-468.

- [5] R. JELINEK und A. RANKE, "Berechnung der Spannungsverteilung in einem Zweischichtensystem", Die Bautechnik, 2 (1970), 48-57.
- [6] A. JONES, "The calculation of surface deflection for three-layer elastic systems", Symposium sur les routes expérimentales pour le calcul des chaussées, 8 (Lisbonne, Avril-Mai 1962), 1-27.
- [7] A. KEZDI, "Beiträge zur Berechnung der Spannungsverteilung im Boden", Der Bauingenieur, 33, 2 (1958), 54-58.
- [8] J. MANDEL, "Consolidation des couches d'argile" Comptes-Rendus du 4^e Congrès international de Mécanique des Sols et de Fondations, 1, 3 a/21 (Londres, 1957), 360-367.
- [9] K. UESHITA and G.G. MEYERHOF, "Deflection of multilayer soil systems", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 93, SM5 (September 1967), 257-282.
- [10] R.A. WESTMANN, "Layered Systems subjected to Surface Shears", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 89, EM6 (December, 1963), 177-191.
- [11] R.A. WESTMANN, "Layered Systems Subjected to Asymmetric Surface Shears", Proc. of the Royal Society of Edimburg (June 1964), 140-149.

**FONDATION CIRCULAIRE EXERÇANT
UNE CHARGE NORMALE UNIFORME**

(Réservoir, Radier souple)
sur un sol composé de trois couches

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul direct du tassement.
- Calcul des contraintes.
- Tables.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

La couche supérieure a pour épaisseur H_1 . Elle est homogène et le sol qui la constitue a pour module d'Young, E_1 , et pour coefficient de Poisson, ν_1 . La couche intermédiaire est caractérisée par H_2 , E_2 et ν_2 . La couche inférieure a une épaisseur infinie, un module d'Young E_3 et un coefficient de Poisson ν_3 . L'adhérence entre les trois couches est parfaite (Fig. 1).

DEFINITION DE LA CHARGE

La charge est constituée par une pression uniforme p , exercée sur un cercle de rayon R à la surface du sol (Fig. 1). Cette charge est à peu près celle d'un radier souple de grandes dimensions, ou d'un réservoir de pétrole.

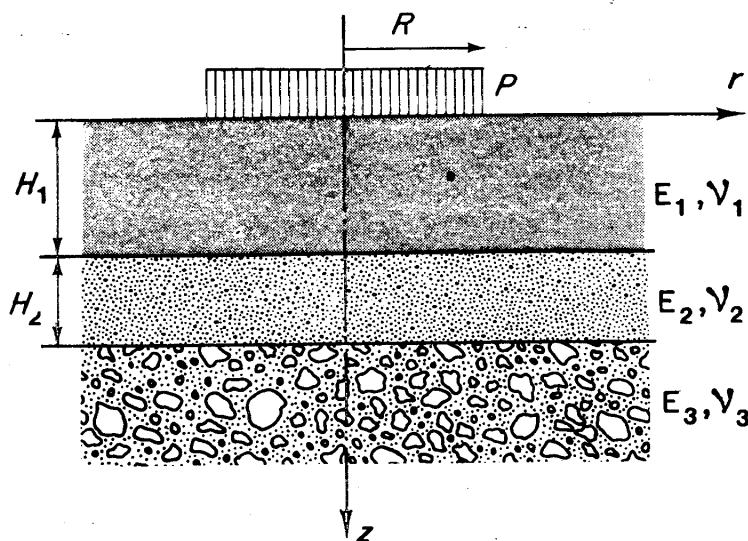


FIG. 1. — Définition du sol et de la charge.

CALCUL DIRECT DU TASSEMENT

Le tassement du centre ($r = 0$, $z = 0$) du cercle est donné par :

$$(1) \quad w = \frac{pR}{E_1} M_{3H_1}$$

ou par :

$$(2) \quad w = \frac{pR}{E_3} M_{3H_3}$$

avec :

- w : tassement du centre du cercle,
 p : contraire normale uniforme exercée par la fondation circulaire sur le sol,
 R : rayon de la fondation,
 E_1 : module d'Young du sol de la couche supérieure,
 E_2 : module d'Young du sol de la couche intermédiaire,
 E_3 : module d'Young du sol de la couche inférieure,
 M_{3H_1} , M_{3H_3} : coefficients sans dimensions dont les valeurs numériques sont données dans des tables en fonctions de E_1 , E_2 , E_3 , H_1 , H_2 et R ,
 H_1 : épaisseur de la couche supérieure,
 H_2 : épaisseur de la couche intermédiaire.

Notons que :

M_{3H_1} n'a été calculé que pour $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,35$,

M_{3H_3} n'a été calculé que pour $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,5$,

avec :

ν_1 , ν_2 , ν_3 : coefficients de Poisson des couches supérieure, intermédiaire et inférieure.

Exemple 1 :

Considérons un réservoir de pétrole de 18 m (59 ft) de rayon exerçant sur le sol une charge uniforme de 0,8 bar (1 670 lb/sq.ft). La première couche de sol a 29 m (95 ft) d'épaisseur et un module d'Young de 500 bars (1 044 000 lb/sq.ft). La deuxième couche a 7 m (23 ft) d'épaisseur et un module d'Young de 250 bars (522 000 lb/sq.ft). La troisième couche a une épaisseur infinie et un module d'Young de 25 bars (52 200 lb/sq.ft). On supposera que les trois couches ont, pour coefficient de Poisson, 0,5. Quel est le tassement du centre du réservoir ?

Les paramètres du problème sont :

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,5$$

$$r = 0 \text{ (centre)}$$

$$E_1/E_2 = 2 \quad E_2/E_3 = 10$$

$$\frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0,8 \quad \frac{R}{H_1 + H_2} = 0,5$$

On lit dans la case correspondante du tableau : $M_{3H3} = 0,36$. D'où :

$$w = \frac{0,8 \times 18}{25} \times 0,36 = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

$$= \frac{1\ 670 \times 59}{52\ 200} \times 0,36 = 0,68 \text{ ft} = 8 \text{ in.}$$

CALCUL DES CONTRAINTES

La valeur de la contrainte σ_z au premier interface ($z = H_1$) et au second interface ($z = H_1 + H_2$) est donnée dans les tables ci-après pour $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,5$.

Exemple 2 :

Considérons un réservoir de pétrole de 18 m (59 ft) de rayon exerçant sur le sol une charge uniforme de 0,8 bar (1 670 lb/sq.ft). La première couche de sol a 11 m (36 ft) d'épaisseur et un module d'Young de 200 bars (418 000 lb/sq.ft). La deuxième couche a 5,5 m (18 ft) d'épaisseur et un module de 10 bars (20 900 lb/sq.ft). La troisième couche a une épaisseur infinie et un module de 50 bars (104 500 lb/sq.ft). On supposera que le coefficient de Poisson des trois couches est 0,5. Quelle est la valeur de σ_z à la verticale du centre de la charge, à la surface de séparation entre les deux premières couches ?

Les paramètres du problème sont :

$$r = 0 \text{ (centre) ,}$$

$$z = H_1 \text{ (premier interface) .}$$

$$R/H_2 = 18/5,5 = 59/18 = 3,2 \quad H_1/H_2 = 11/5,5 = 36/18 = 2$$

$$E_1/E_2 = 20 \quad \text{et} \quad E_2/E_3 = 0,2$$

On lit alors dans les tables :

$$\sigma_z = 0,679 p$$

$$= 0,679 \times 0,8 = 0,54 \text{ bar}$$

$$= 0,679 \times 1\ 670 = 1\ 130 \text{ lb/sq.ft.}$$

TABLES- Calcul du tassement

Coefficients : M_{3H_1} pour $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,35$: pp. 264 à 270.

M_{3H_3} pour $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,5$: pp. 271 et 272.

- Calcul des contraintes

Tables de σ_z/p pour $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,5$: pp. 273 à 279.

M
3EM

$r = 0$

$z = 0$

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$

H_1/H_2		0.125							
		E_1/E_2 E_2/E_3	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
0.1	1.0	1.068	1.339	1.755	2.497	4.338	6.805	10.78	19.90
	2.0	1.087	1.386	1.846	2.673	4.758	7.613	12.35	23.63
	5.0	1.133	1.498	2.065	3.093	5.737	9.477	15.92	32.15
	10.0	1.194	1.647	2.351	3.635	6.985	11.82	20.39	42.81
	20.0	1.292	1.883	2.805	4.491	8.931	15.46	27.29	59.25
	50.0	1.514	2.421	3.832	6.418	13.28	23.56	42.59	95.66
0.2	1.0	0.7158	1.117	1.755	2.945	6.085	10.53	17.96	35.50
	2.0	0.7534	1.210	1.936	3.296	6.922	12.14	21.07	42.93
	5.0	0.8454	1.435	2.373	4.133	8.876	15.86	28.20	59.93
	10.0	0.9672	1.731	2.944	5.217	11.37	20.55	37.13	81.23
	20.0	1.162	2.203	3.850	6.926	15.26	27.82	50.93	114.1
	50.0	1.607	3.278	5.905	10.78	23.95	44.00	81.52	186.9
0.4	1.0	0.5158	0.9844	1.755	3.266	7.610	14.35	26.53	57.43
	2.0	0.5898	1.167	2.112	3.959	9.259	17.53	32.67	72.12
	5.0	0.7716	1.611	2.975	5.615	13.13	24.89	46.80	105.9
	10.0	1.013	2.200	4.110	7.769	18.08	34.22	64.57	148.2
	20.0	1.402	3.141	5.916	11.17	25.84	48.73	92.08	213.8
	50.0	2.289	5.285	10.02	18.86	43.20	81.04	153.2	359.2
0.8	1.0	0.4319	0.9303	1.755	3.390	8.242	16.23	31.87	76.24
	2.0	0.5709	1.273	2.427	4.699	11.37	22.26	43.56	104.3
	5.0	0.9191	2.126	4.086	7.886	18.84	36.50	70.90	169.8
	10.0	1.390	3.271	6.298	12.09	28.53	54.78	105.8	253.1
	20.0	2.153	5.123	9.854	18.81	43.84	83.45	160.2	382.9
	50.0	3.910	9.372	17.98	34.07	78.34	147.7	281.7	672.2
1.6	1.0	0.3918	0.9046	1.755	3.444	8.459	16.74	33.19	82.31
	2.0	0.6203	1.470	2.870	5.628	13.72	26.95	53.08	130.6
	5.0	1.224	2.955	5.774	11.24	26.98	52.37	102.1	248.9
	10.0	2.080	5.047	9.831	19.00	45.00	86.48	167.4	405.6
	20.0	3.515	8.537	16.56	31.76	74.25	141.5	272.1	655.8
	50.0	6.905	16.75	32.31	61.41	141.6	267.1	510.1	1224.0
3.2	1.0	0.3715	0.8913	1.755	3.474	8.588	17.02	33.76	83.57
	2.0	0.6693	1.633	3.228	6.389	15.72	31.00	61.18	150.8
	5.0	1.523	3.750	7.411	14.59	35.48	69.35	135.9	332.9
	10.0	2.844	7.006	13.80	26.98	64.85	125.7	244.7	596.5
	20.0	5.224	12.84	25.16	48.82	115.8	222.5	430.4	1044.0
	50.0	11.25	27.52	53.52	102.8	239.8	455.8	874.9	2109.0

(d'après JONES)

M
3EM

$r = 0$

$z = 0$

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$

H_1/H_2		0.25									
		R/H_2	E_1/E_2	E_2/E_3	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
0.1	1.0	1.377	1.527	1.755	2.154	3.122	4.395	6.424	11.03		
	2.0	1.394	1.570	1.837	2.311	3.490	5.096	7.753	14.07		
	5.0	1.438	1.673	2.034	2.682	4.347	6.716	10.82	21.16		
	10.0	1.495	1.810	2.291	3.162	5.437	8.769	14.72	30.24		
	20.0	1.588	2.028	2.700	3.916	7.138	11.96	20.80	44.48		
	50.0	1.800	2.526	3.625	5.612	10.94	19.10	34.37	76.46		
0.2	1.0	1.068	1.339	1.755	2.497	4.338	6.805	10.78	19.90		
	2.0	1.103	1.424	1.918	2.810	5.072	8.203	13.44	25.97		
	5.0	1.189	1.630	2.311	3.551	6.783	11.44	19.57	40.14		
	10.0	1.303	1.903	2.825	4.508	8.961	15.54	27.36	58.28		
	20.0	1.489	2.339	3.642	6.015	12.36	21.93	39.50	86.75		
	50.0	1.913	3.334	5.491	9.408	19.97	36.19	66.63	150.7		
0.4	1.0	0.7158	1.117	1.755	2.945	6.085	10.53	17.96	35.50		
	2.0	0.7843	1.284	2.077	3.563	7.538	13.30	23.22	47.56		
	5.0	0.9544	1.692	2.857	5.034	10.93	19.73	35.42	75.75		
	10.0	1.183	2.235	3.879	6.939	15.27	27.90	50.94	111.9		
	20.0	1.552	3.105	5.506	9.944	22.05	40.64	75.18	168.8		
	50.0	2.399	5.090	9.198	16.72	37.25	69.13	129.4	296.5		
0.8	1.0	0.5158	0.9844	1.755	3.266	7.610	14.35	26.53	57.43		
	2.0	0.6457	1.301	2.369	4.447	10.40	19.68	36.69	80.89		
	5.0	0.9733	2.089	3.877	7.299	17.00	32.21	60.55	136.3		
	10.0	1.419	3.150	5.880	11.04	25.53	48.31	91.18	207.9		
	20.0	2.146	4.865	9.093	16.98	38.97	73.58	139.3	320.8		
	50.0	3.826	8.806	16.43	30.45	69.20	130.3	247.2	575.5		
1.6	1.0	0.4319	0.9303	1.755	3.390	8.242	16.23	31.87	76.24		
	2.0	0.6503	1.466	2.801	5.419	13.08	25.58	49.91	118.8		
	5.0	1.228	2.865	5.495	10.55	25.09	48.53	93.96	222.5		
	10.0	2.047	4.825	9.220	17.55	41.18	79.04	152.3	359.9		
	20.0	3.421	8.085	15.36	28.95	67.10	128.0	245.7	580.3		
	50.0	6.674	15.74	29.64	55.28	126.4	239.4	458.3	1083.0		
3.2	1.0	0.3918	0.9046	1.755	3.444	8.459	16.74	33.19	82.31		
	2.0	0.6845	1.630	3.189	6.262	15.30	30.13	59.47	146.4		
	5.0	1.521	3.685	7.208	14.06	33.92	66.21	129.7	316.1		
	10.0	2.809	6.816	13.26	25.62	61.03	118.2	230.4	557.4		
	20.0	5.122	12.38	23.87	45.65	107.3	206.4	400.1	962.4		
	50.0	10.95	26.24	50.03	94.38	218.4	416.5	802.6	1920.0		

(d'après JONES)

3-4

M 3111

$r = 0$

$z = 0$

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$

H_1/H_2		0.5							
		E_1/E_2	E_2/E_3	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0
0.1	1.0	1.561	1.638	1.755	1.959	2.449	3.091	4.111	6.420
	2.0	1.576	1.674	1.823	2.087	2.742	3.632	5.094	8.524
	5.0	1.614	1.762	1.987	2.391	3.428	4.899	7.412	13.52
	10.0	1.665	1.879	2.202	2.783	4.309	6.533	10.42	20.06
	20.0	1.748	2.067	2.542	3.402	5.696	9.112	15.19	30.50
	50.0	1.939	2.494	3.313	4.794	8.819	14.93	26.02	54.34
0.2	1.0	1.377	1.527	1.755	2.154	3.122	4.395	6.424	11.03
	2.0	1.407	1.599	1.891	2.410	3.706	5.475	8.389	15.24
	5.0	1.483	1.775	2.219	3.017	5.076	8.007	13.02	25.22
	10.0	1.585	2.009	2.648	3.801	6.838	11.27	19.03	38.29
	20.0	1.751	2.383	3.328	5.038	9.610	16.43	28.58	59.18
	50.0	2.133	3.237	4.869	7.827	15.86	28.07	50.22	106.9
0.4	1.0	1.068	1.339	1.755	2.497	4.338	6.805	10.78	19.90
	2.0	1.127	1.481	2.025	3.005	5.499	8.952	14.70	28.28
	5.0	1.277	1.831	2.677	4.212	8.227	14.00	23.93	48.21
	10.0	1.480	2.296	3.531	5.776	11.74	20.52	35.94	74.33
	20.0	1.811	3.043	4.889	8.244	17.28	30.82	55.01	116.1
	50.0	2.575	4.749	7.967	13.82	29.76	54.08	98.27	211.4
0.8	1.0	0.7158	1.117	1.755	2.945	6.085	10.53	17.96	35.50
	2.0	0.8300	1.391	2.277	3.930	8.349	14.73	25.65	52.06
	5.0	1.121	2.072	3.550	6.295	13.71	24.68	43.92	91.61
	10.0	1.520	2.987	5.233	9.382	20.67	37.61	67.77	143.6
	20.0	2.173	4.465	7.924	14.28	31.67	58.10	105.7	226.8
	50.0	3.690	7.856	14.05	25.38	56.56	104.5	192.1	417.1
1.6	1.0	0.5158	0.9844	1.755	3.266	7.610	14.35	26.53	57.43
	2.0	0.7146	1.465	2.680	5.034	11.74	22.12	40.96	89.09
	5.0	1.240	2.707	5.023	9.425	21.82	41.01	75.98	165.9
	10.0	1.985	4.430	8.215	15.32	35.21	66.04	122.4	267.9
	20.0	3.233	7.273	13.42	24.85	56.72	106.2	197.2	432.4
	50.0	6.187	13.91	25.45	46.70	105.9	198.1	368.3	810.4
3.2	1.0	0.4319	0.9303	1.755	3.390	8.242	16.23	31.87	76.24
	2.0	0.7127	1.620	3.106	6.023	14.57	28.48	55.40	130.5
	5.0	1.509	3.543	6.808	13.11	31.28	60.47	116.2	268.7
	10.0	2.722	6.415	12.24	23.32	54.97	105.4	201.1	459.4
	20.0	4.879	11.43	21.57	40.65	94.70	180.4	342.0	774.4
	50.0	10.27	23.72	44.12	82.02	188.6	356.9	672.8	1511.0

(d'après JONES)

M 311

$r = 0$

$z = 0$

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$

H_1/H_2		1							
		E_1/E_2	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
R/H_2	E_2/E_3								
	0.1	1.0	1.657	1.696	1.755	1.857	2.103	2.425	2.936
2.0		1.669	1.724	1.806	1.951	2.308	2.786	3.561	5.348
5.0		1.699	1.792	1.929	2.173	2.790	3.641	5.046	8.322
10.0		1.741	1.882	2.090	2.462	3.419	4.760	6.994	12.22
20.0		1.808	2.026	2.346	2.920	4.418	6.545	10.11	18.47
50.0		1.962	2.353	2.924	3.957	6.691	10.62	17.24	32.76
0.2	1.0	1.561	1.638	1.755	1.959	2.449	3.091	4.111	6.420
	2.0	1.585	1.694	1.857	2.146	2.857	3.813	5.362	8.933
	5.0	1.645	1.829	2.103	2.590	3.822	5.523	8.331	14.82
	10.0	1.728	2.009	2.425	3.168	5.078	7.759	12.22	22.68
	20.0	1.862	2.297	2.936	4.083	7.077	11.33	18.46	35.17
	50.0	2.171	2.951	4.091	6.156	11.62	19.48	32.72	63.77
0.4	1.0	1.377	1.527	1.755	2.154	3.122	4.395	6.424	11.03
	2.0	1.424	1.637	1.959	2.527	3.935	5.835	8.922	16.05
	5.0	1.544	1.907	2.449	3.413	5.861	9.250	14.85	27.94
	10.0	1.709	2.266	3.091	4.566	8.371	13.72	22.64	43.53
	20.0	1.976	2.841	4.111	6.395	12.37	20.86	35.10	68.51
	50.0	2.594	4.148	6.420	10.54	21.46	37.15	63.61	125.7
0.8	1.0	1.068	1.339	1.755	2.497	4.338	6.805	10.78	19.90
	2.0	1.160	1.553	2.154	3.230	5.945	9.659	15.75	29.90
	5.0	1.395	2.085	3.122	4.984	9.766	16.45	27.56	53.62
	10.0	1.720	2.796	4.395	7.274	14.76	25.35	43.09	84.75
	20.0	2.251	3.938	6.424	10.92	22.73	39.59	67.97	134.7
	50.0	3.480	6.542	11.03	19.19	40.88	72.14	124.9	249.0
1.6	1.0	0.7158	1.117	1.755	2.945	6.085	10.53	17.96	35.50
	2.0	0.8829	1.512	2.497	4.324	9.155	16.04	27.64	55.17
	5.0	1.322	2.514	4.338	7.688	16.57	29.31	50.87	102.1
	10.0	1.941	3.882	6.805	12.15	26.37	46.87	81.60	164.0
	20.0	2.970	6.110	10.78	19.33	42.12	75.10	131.1	263.4
	50.0	5.383	11.25	19.90	35.73	78.19	139.9	244.6	491.5
3.2	1.0	0.5158	0.9844	1.755	3.266	7.610	14.35	26.53	57.43
	2.0	0.7713	1.602	2.945	5.539	12.87	24.10	44.16	94.49
	5.0	1.483	3.271	6.085	11.42	26.23	48.54	87.87	184.8
	10.0	2.544	5.684	10.53	19.61	44.58	81.89	147.0	305.6
	20.0	4.394	9.782	17.96	33.17	74.78	136.5	243.5	501.4
	50.0	8.914	19.57	35.50	64.95	145.2	263.6	467.3	953.5

(d'après JONES)

3-4

M
3H11

$r = 0$

$z = 0$

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$

H_1/H_2		2								
		E_1/E_2	E_2/E_3	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
0.1	1.0		1.706	1.726	1.755	1.806	1.929	2.090	2.346	2.924
	2.0		1.714	1.744	1.789	1.867	2.055	2.304	2.702	3.609
	5.0		1.736	1.791	1.871	2.011	2.353	2.808	3.538	5.207
	10.0		1.765	1.852	1.979	2.199	2.741	3.465	4.629	7.286
	20.0		1.813	1.950	2.149	2.497	3.361	4.516	6.372	10.60
	50.0		1.921	2.171	2.534	3.175	4.774	6.915	10.35	18.18
0.2	1.0		1.657	1.696	1.755	1.857	2.103	2.425	2.936	4.091
	2.0		1.674	1.734	1.823	1.979	2.355	2.852	3.648	5.461
	5.0		1.717	1.827	1.987	2.267	2.950	3.860	5.321	8.659
	10.0		1.775	1.950	2.202	2.642	3.726	5.175	7.503	12.82
	20.0		1.870	2.145	2.542	3.240	4.966	7.276	10.99	19.45
	50.0		2.086	2.586	3.313	4.597	7.792	12.07	18.95	34.60
0.4	1.0		1.561	1.638	1.755	1.959	2.449	3.091	4.111	6.420
	2.0		1.594	1.713	1.891	2.201	2.952	3.945	5.535	9.160
	5.0		1.679	1.899	2.219	2.776	4.141	5.958	8.880	15.55
	10.0		1.796	2.144	2.648	3.527	5.693	8.588	13.24	23.87
	20.0		1.986	2.535	3.328	4.721	8.171	12.79	20.21	37.14
	50.0		2.418	3.417	4.869	7.436	13.82	22.39	36.14	67.44
0.8	1.0		1.377	1.527	1.755	2.154	3.122	4.395	6.424	11.03
	2.0		1.442	1.676	2.025	2.635	4.123	6.097	9.266	16.50
	5.0		1.611	2.044	2.677	3.781	6.494	10.12	15.95	29.28
	10.0		1.843	2.532	3.531	5.278	9.592	15.37	24.67	45.91
	20.0		2.221	3.310	4.889	7.662	14.54	23.77	38.60	72.43
	50.0		3.083	5.072	7.967	13.09	25.84	42.96	70.44	133.0
1.6	1.0		1.068	1.339	1.755	2.497	4.338	6.805	10.78	19.90
	2.0		1.192	1.624	2.277	3.433	6.303	10.17	16.42	30.79
	5.0		1.517	2.338	3.550	5.684	10.99	18.14	29.71	56.28
	10.0		1.970	3.296	5.233	8.646	17.14	28.59	47.09	89.46
	20.0		2.712	4.834	7.924	13.38	27.00	45.34	74.90	142.5
	50.0		4.419	8.335	14.05	24.19	49.55	83.66	138.5	263.6
3.2	1.0		0.7158	1.117	1.755	2.945	6.085	10.53	17.96	35.50
	2.0		0.9269	1.613	2.680	4.644	9.762	16.94	28.87	56.87
	5.0		1.499	2.900	5.023	8.864	18.73	32.40	54.91	107.2
	10.0		2.325	4.688	8.215	14.55	30.72	52.93	89.25	173.2
	20.0		3.718	7.631	13.42	23.79	50.11	86.03	144.4	278.7
	50.0		7.007	14.46	25.45	45.11	94.79	162.2	271.1	520.3

(d'après JONES)

M 3111

$$r = 0$$

$$z = 0$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$$

R/H_2		H_1/H_2	4							
		E_1/E_2 E_2/E_3	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0	50.0
0.1	1.0	1.731	1.740	1.755	1.781	1.842	1.923	2.050	2.339	
	2.0	1.736	1.752	1.775	1.816	1.913	2.040	2.240	2.696	
	5.0	1.749	1.780	1.825	1.900	2.079	2.311	2.680	3.518	
	10.0	1.767	1.818	1.889	2.010	2.294	2.664	3.250	4.581	
	20.0	1.797	1.877	1.991	2.184	6.637	3.224	4.156	6.271	
	50.0	1.864	2.012	2.223	2.579	3.418	4.502	6.222	10.13	
0.2	1.0	1.706	1.726	1.755	1.806	1.929	2.090	2.346	2.924	
	2.0	1.716	1.749	1.796	1.877	2.071	2.324	2.726	3.637	
	5.0	1.743	1.805	1.895	2.046	2.403	2.868	3.606	5.281	
	10.0	1.780	1.880	2.023	2.264	2.834	3.572	4.744	7.406	
	20.0	1.839	2.000	2.228	2.612	3.519	4.694	6.557	10.79	
	50.0	1.972	2.269	2.690	3.402	5.079	7.249	10.69	18.50	
0.4	1.0	1.657	1.696	1.755	1.857	2.103	2.425	2.936	4.091	
	2.0	1.678	1.742	1.837	2.000	2.387	2.892	3.695	5.518	
	5.0	1.731	1.856	2.034	2.336	3.051	3.980	5.455	8.807	
	10.0	1.804	2.006	2.291	2.774	3.911	5.388	7.732	13.06	
	20.0	1.923	2.244	2.700	3.469	5.282	7.631	11.36	19.82	
	50.0	2.189	2.782	3.625	5.050	8.403	12.74	19.62	35.24	
0.8	1.0	1.561	1.638	1.755	1.959	2.449	3.091	4.111	6.420	
	2.0	1.602	1.730	1.918	2.242	3.015	4.025	5.629	9.273	
	5.0	1.708	1.956	2.311	2.914	4.341	6.198	9.147	15.85	
	10.0	1.854	2.256	2.825	3.788	6.062	9.014	13.70	24.35	
	20.0	2.090	2.732	3.642	5.179	8.802	13.50	20.95	37.88	
	50.0	2.623	3.807	5.491	8.339	15.04	23.72	37.48	68.72	
1.6	1.0	1.377	1.527	1.755	2.154	3.122	4.395	6.424	11.03	
	2.0	1.457	1.707	2.077	2.716	4.248	6.255	9.453	16.73	
	5.0	1.666	2.155	2.857	4.051	6.889	10.59	16.48	29.87	
	10.0	1.955	2.750	3.879	5.793	10.32	16.22	25.58	46.87	
	20.0	2.424	3.698	5.506	8.567	15.80	25.18	40.07	73.91	
	50.0	3.486	5.842	9.198	14.88	28.27	45.62	73.12	135.6	
3.2	1.0	1.068	1.339	1.755	2.497	4.338	6.805	10.78	19.90	
	2.0	1.217	1.678	2.369	3.579	6.536	10.47	16.78	31.23	
	5.0	1.612	2.535	3.877	6.185	11.74	19.06	30.75	57.44	
	10.0	2.167	3.692	5.880	9.620	18.55	30.25	48.89	91.36	
	20.0	3.078	5.555	9.093	15.12	29.44	48.11	77.81	145.4	
	50.0	5.169	9.801	16.43	27.69	54.32	88.91	143.8	268.6	

(d'après JONES)

M
3H11

$r = 0$

$z = 0$

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.35$

H_1/H_2		8							
		E_1/E_2 E_2/E_3	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
0.1	1.0	1.743	1.748	1.755	1.768	1.799	1.839	1.903	2.047
	2.0	1.746	1.754	1.766	1.787	1.836	1.900	2.001	2.229
	5.0	1.753	1.770	1.794	1.833	1.924	2.041	2.225	2.644
	10.0	1.764	1.791	1.830	1.892	2.036	2.221	2.515	3.181
	20.0	1.781	1.825	1.886	1.986	2.215	2.509	2.975	4.032
	50.0	1.819	1.901	2.015	2.199	2.622	3.163	4.021	5.972
0.2	1.0	1.731	1.740	1.755	1.781	1.842	1.923	2.050	2.339
	2.0	1.736	1.753	1.778	1.819	1.918	2.045	2.246	2.703
	5.0	1.751	1.785	1.833	1.911	2.092	2.326	2.696	3.533
	10.0	1.772	1.828	1.904	2.029	2.318	2.688	2.275	4.606
	20.0	1.806	1.895	2.018	2.217	2.675	3.263	4.194	6.309
	50.0	1.883	2.048	2.274	2.643	3.488	4.572	6.288	10.19
0.4	1.0	1.706	1.726	1.755	1.806	1.929	2.090	2.346	2.924
	2.0	1.718	1.751	1.801	1.884	2.080	2.335	2.738	3.651
	5.0	1.748	1.815	1.910	2.067	2.430	2.897	3.636	5.314
	10.0	1.790	1.900	2.053	2.303	2.881	3.621	4.794	7.457
	20.0	1.857	2.036	2.280	2.679	3.596	4.771	6.633	10.86
	50.0	2.010	2.341	2.794	3.532	5.222	7.388	10.82	18.62
0.8	1.0	1.657	1.696	1.755	1.857	2.103	2.425	2.936	4.091
	2.0	1.680	1.748	1.846	2.013	2.405	2.914	3.719	5.545
	5.0	1.741	1.876	2.065	2.378	3.104	4.038	5.517	8.873
	10.0	1.824	2.045	2.351	2.851	4.005	5.486	7.832	13.16
	20.0	1.960	2.316	2.805	3.603	5.435	7.786	11.51	19.97
	50.0	2.265	2.926	3.832	5.308	8.688	13.02	19.89	35.49
1.6	1.0	1.561	1.638	1.755	1.959	2.449	3.091	4.111	6.420
	2.0	1.607	1.741	1.936	2.268	3.052	4.067	5.677	9.328
	5.0	1.727	1.996	2.373	2.998	4.448	6.314	9.270	15.98
	10.0	1.893	2.334	2.944	3.943	6.249	9.210	13.90	24.55
	20.0	2.163	2.874	3.850	5.446	9.108	13.81	21.25	38.18
	50.0	2.773	4.094	5.904	8.855	15.61	24.28	38.01	69.21
3.2	1.0	1.377	1.527	1.755	2.154	3.122	4.395	6.424	11.03
	2.0	1.466	1.728	2.112	2.766	4.319	6.339	9.548	16.84
	5.0	1.702	2.231	2.975	4.215	7.099	10.82	16.72	30.14
	10.0	2.031	2.902	4.110	6.099	10.69	16.60	25.97	47.27
	20.0	2.565	3.975	5.916	9.094	16.40	25.79	40.68	74.51
	50.0	3.779	6.407	10.02	15.90	29.40	46.72	74.17	136.6

(d'après JONES)



$$v_1 = v_2 = v_3 = 0.5$$

$$r = 0$$

$$E_1/E_2 = 2$$

$$E_1/E_2 = 10$$

$$E_1/E_2 = 100$$

$\frac{R}{H_1 + H_2} = 0.25$		$E_2/E_3 \rightarrow$	2			10			100					
		H_1	0	0.2	0.4	0.85	0.30	0.10	0.85	0.30	0.10	0.85	0.30	0.10
$\frac{H_1}{H_1 + H_2}$			0.75	0.28	0.092	0.55	0.22	0.078	0.31	0.16	0.063	0.31	0.16	0.063
			0.65	0.26	0.090	0.37	0.17	0.069	0.17	0.097	0.043	0.17	0.097	0.043
		0.6	0.60	0.24	0.088	0.29	0.14	0.061	0.12	0.067	0.030	0.12	0.067	0.030
		0.8	0.57	0.23	0.082	0.24	0.12	0.050	0.094	0.052	0.024	0.094	0.052	0.024
		1	0.53	0.22	0.080	0.22	0.10	0.041	0.078	0.041	0.019	0.078	0.041	0.019

$\frac{R}{H_1 + H_2} = 0.5$		$E_2/E_3 \rightarrow$	2			10			100					
		H_1	0	0.2	0.4	1.00	0.46	0.18	1.00	0.46	0.18	1.00	0.46	0.18
$\frac{H_1}{H_1 + H_2}$			0.98	0.45	0.17	0.85	0.40	0.15	0.55	0.29	0.13	0.55	0.29	0.13
			0.88	0.42	0.17	0.63	0.34	0.14	0.35	0.20	0.089	0.35	0.20	0.089
		0.6	0.80	0.40	0.17	0.48	0.28	0.12	0.24	0.14	0.062	0.24	0.14	0.062
		0.8	0.73	0.36	0.16	0.40	0.22	0.10	0.18	0.10	0.047	0.18	0.10	0.047
		1	0.69	0.35	0.14	0.35	0.18	0.082	0.14	0.082	0.038	0.14	0.082	0.038

$\frac{R}{H_1 + H_2} = 1$		$E_2/E_3 \rightarrow$	2			10			100					
		H_1	0	0.2	0.4	1.20	0.72	0.36	1.20	0.72	0.36	1.20	0.72	0.36
$\frac{H_1}{H_1 + H_2}$			1.20	0.70	0.33	1.10	0.65	0.30	0.92	0.56	0.25	0.92	0.56	0.25
			1.10	0.69	0.32	0.96	0.59	0.27	0.63	0.38	0.17	0.63	0.38	0.17
		0.6	1.05	0.66	0.32	0.81	0.50	0.24	0.45	0.27	0.12	0.45	0.27	0.12
		0.8	1.00	0.62	0.30	0.69	0.42	0.20	0.35	0.20	0.095	0.35	0.20	0.095
		1	0.98	0.60	0.29	0.60	0.36	0.16	0.28	0.16	0.076	0.28	0.16	0.076

$\frac{R}{H_1 + H_2} = 2$		$E_2/E_3 \rightarrow$	2			10			100					
		H_1	0	0.2	0.4	1.35	1.13	0.62	1.35	1.13	0.64	1.35	1.13	0.64
$\frac{H_1}{H_1 + H_2}$			1.35	1.10	0.61	1.35	1.01	0.52	1.30	0.89	0.46	1.30	0.89	0.46
			1.35	1.07	0.60	1.30	0.93	0.51	1.00	0.68	0.32	1.00	0.68	0.32
		0.6	1.32	1.05	0.60	1.25	0.87	0.45	0.80	0.51	0.25	0.80	0.51	0.25
		0.8	1.30	1.01	0.57	1.05	0.76	0.39	0.63	0.40	0.19	0.63	0.40	0.19
		1	1.30	0.97	0.53	0.97	0.64	0.32	0.54	0.32	0.15	0.54	0.32	0.15

(d'après UESHITA et MEYERHOF)



$$v_1 = v_2 = v_3 = 0.5$$

$$r = R$$

$$E_1/E_2 = 2$$

$$E_1/E_2 = 10$$

$$E_1/E_2 = 100$$

$\frac{R}{H_1 + H_2} = 0.25$	$E_2/E_3 \rightarrow$		2	10	100	2	10	100	2	10	100	
	H_1	0	0.60	0.25	0.096	0.60	0.25	0.096	0.60	0.25	0.096	
		0.2	0.55	0.24	0.089	0.46	0.20	0.075	0.30	0.15	0.061	
		0.4	0.49	0.22	0.086	0.33	0.16	0.068	0.17	0.095	0.043	
		$H_1 + H_2$	0.6	0.45	0.21	0.083	0.26	0.13	0.060	0.12	0.067	0.030
		0.8	0.41	0.20	0.080	0.21	0.11	0.050	0.090	0.052	0.024	
	1	0.40	0.19	0.075	0.19	0.096	0.041	0.075	0.041	0.019		

$\frac{R}{H_1 + H_2} = 0.5$	$E_2/E_3 \rightarrow$		2	10	100	2	10	100	2	10	100	
	H_1	0	0.70	0.39	0.18	0.70	0.39	0.18	0.70	0.39	0.18	
		0.2	0.69	0.38	0.17	0.63	0.35	0.15	0.50	0.28	0.12	
		0.4	0.68	0.36	0.17	0.53	0.30	0.14	0.33	0.19	0.089	
		$H_1 + H_2$	0.6	0.61	0.35	0.16	0.44	0.26	0.12	0.23	0.13	0.062
		0.8	0.56	0.33	0.15	0.37	0.21	0.10	0.17	0.10	0.047	
	1	0.55	0.31	0.14	0.31	0.18	0.082	0.14	0.082	0.038		

$\frac{R}{H_1 + H_2} = 1$	$E_2/E_3 \rightarrow$		2	10	100	2	10	100	2	10	100	
	H_1	0	0.82	0.60	0.33	0.82	0.60	0.33	0.82	0.60	0.33	
		0.2	0.81	0.60	0.31	0.81	0.57	0.28	0.72	0.48	0.24	
		0.4	0.81	0.59	0.31	0.77	0.51	0.26	0.57	0.36	0.17	
		$H_1 + H_2$	0.6	0.80	0.57	0.30	0.67	0.45	0.23	0.41	0.26	0.12
		0.8	0.77	0.56	0.29	0.60	0.40	0.19	0.33	0.20	0.095	
	1	0.73	0.52	0.28	0.52	0.33	0.17	0.28	0.16	0.076		

$\frac{R}{H_1 + H_2} = 2$	$E_2/E_3 \rightarrow$		2	10	100	2	10	100	2	10	100	
	H_1	0	0.91	0.82	0.57	0.91	0.82	0.57	0.91	0.82	0.57	
		0.2	0.91	0.81	0.53	0.91	0.80	0.49	0.90	0.71	0.42	
		0.4	0.91	0.80	0.53	0.90	0.75	0.48	0.80	0.60	0.32	
		$H_1 + H_2$	0.6	0.91	0.80	0.53	0.88	0.70	0.42	0.67	0.48	0.25
		0.8	0.90	0.80	0.51	0.81	0.65	0.37	0.58	0.39	0.19	
	1	0.88	0.75	0.49	0.75	0.57	0.30	0.49	0.30	0.15		

(d'après UESHITA et MEYERHOF)

$\frac{\sigma_z}{p}$	$v_1 = v_2 = v_3 = 0.5$	$\frac{H_1}{H_2} = 0.125$
	$r = 0$	

$E_1/E_2 = 0.2$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.660	0.016	0.660	0.009	0.662	0.003	0.663	0.001
	0.2	0.902	0.060	0.902	0.035	0.904	0.010	0.904	0.002
	0.4	0.953	0.213	0.951	0.127	0.951	0.038	0.947	0.009
	0.8	0.995	0.564	0.992	0.373	0.988	0.130	0.991	0.033
	1.6	1.001	0.863	0.999	0.740	0.994	0.364	0.991	0.110
	3.2	1.000	0.941	1.000	0.971	0.998	0.767	0.993	0.327

$E_1/E_2 = 2$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.431	0.017	0.430	0.009	0.430	0.002	0.429	0.000
	0.2	0.787	0.065	0.784	0.035	0.784	0.009	0.783	0.002
	0.4	0.988	0.230	0.980	0.127	0.975	0.034	0.974	0.007
	0.8	1.010	0.609	0.994	0.369	0.978	0.114	0.973	0.026
	1.6	1.006	0.910	0.994	0.721	0.969	0.313	0.955	0.087
	3.2	0.998	0.943	0.999	0.961	0.986	0.684	0.964	0.263

$E_1/E_2 = 20$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.146	0.016	0.145	0.008	0.144	0.002	0.144	0.000
	0.2	0.393	0.064	0.388	0.032	0.385	0.007	0.384	0.001
	0.4	0.803	0.231	0.787	0.117	0.774	0.027	0.771	0.005
	0.8	1.066	0.647	1.022	0.349	0.986	0.091	0.977	0.018
	1.6	1.029	1.009	0.991	0.690	0.937	0.245	0.916	0.060
	3.2	0.998	0.973	0.994	0.935	0.963	0.555	0.927	0.184

$E_1/E_2 = 200$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.037	0.011	0.035	0.005	0.033	0.001	0.033	0.000
	0.2	0.123	0.045	0.115	0.022	0.109	0.005	0.108	0.001
	0.4	0.363	0.168	0.332	0.082	0.311	0.020	0.306	0.004
	0.8	0.821	0.531	0.727	0.273	0.659	0.070	0.644	0.015
	1.6	1.124	1.037	1.002	0.639	0.879	0.210	0.841	0.050
	3.2	0.995	1.004	1.008	0.926	0.933	0.499	0.868	0.157

(d'après JONES)

$\frac{\sigma_z}{p}$	$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.5$	$\frac{H_1}{H_2} = 0.25$
	$\Gamma = 0$	

$E_1/E_2 = 0.2$	R H ₂	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂
	0.1	0.271	0.013	0.271	0.007	0.269	0.002	0.271	0.001
	0.2	0.661	0.049	0.660	0.029	0.662	0.009	0.659	0.002
	0.4	0.904	0.175	0.901	0.107	0.901	0.034	0.897	0.008
	0.8	0.957	0.487	0.949	0.326	0.940	0.117	0.936	0.030
	1.6	0.997	0.812	0.990	0.690	0.973	0.337	0.964	0.102
	3.2	0.999	0.930	1.000	0.956	0.991	0.735	0.973	0.307

$E_1/E_2 = 2$	R H ₂	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂
	0.1	0.156	0.013	0.155	0.007	0.154	0.002	0.154	0.000
	0.2	0.433	0.053	0.428	0.028	0.425	0.007	0.424	0.001
	0.4	0.796	0.191	0.779	0.103	0.766	0.027	0.763	0.006
	0.8	0.950	0.546	0.967	0.318	0.928	0.093	0.916	0.021
	1.6	1.009	0.906	0.981	0.668	0.914	0.265	0.884	0.070
	3.2	1.024	0.939	0.998	0.938	0.952	0.608	0.897	0.217

$E_1/E_2 = 20$	R H ₂	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂
	0.1	0.046	0.011	0.044	0.005	0.042	0.001	0.042	0.000
	0.2	0.151	0.044	0.143	0.021	0.137	0.005	0.136	0.001
	0.4	0.410	0.163	0.379	0.079	0.357	0.019	0.352	0.004
	0.8	0.855	0.516	0.659	0.263	0.689	0.067	0.673	0.014
	1.6	1.120	1.011	0.987	0.617	0.855	0.201	0.812	0.048
	3.2	0.997	0.992	1.001	0.913	0.903	0.486	0.824	0.153

$E_1/E_2 = 200$	R H ₂	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂
	0.1	0.011	0.006	0.009	0.003	0.008	0.001	0.007	0.000
	0.2	0.042	0.023	0.033	0.010	0.027	0.003	0.026	0.001
	0.4	0.142	0.090	0.107	0.040	0.086	0.010	0.081	0.002
	0.8	0.426	0.317	0.305	0.145	0.231	0.038	0.212	0.009
	1.6	0.945	0.834	0.668	0.429	0.468	0.131	0.409	0.032
	3.2	1.107	1.103	0.984	0.845	0.711	0.373	0.566	0.110

(d'après JONES)

$\frac{\sigma_z}{p}$	$v_1 = v_2 = v_3 = 0.5$	$\frac{H_1}{H_2} = 0.5$
	$r = 0$	

$E_1/E_2 = 0.2$	$\frac{R}{H_2}$	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.079	0.009	0.079	0.006	0.079	0.002	0.078	0.000
	0.2	0.272	0.036	0.270	0.022	0.269	0.007	0.268	0.002
	0.4	0.664	0.131	0.658	0.082	0.652	0.027	0.649	0.006
	0.8	0.911	0.390	0.896	0.264	0.874	0.096	0.864	0.024
	1.6	0.963	0.721	0.942	0.604	0.896	0.287	0.867	0.085
	3.2	0.993	0.896	0.992	0.912	0.954	0.664	0.897	0.265

$E_1/E_2 = 2$	$\frac{R}{H_2}$	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.045	0.009	0.043	0.005	0.042	0.001	0.042	0.000
	0.2	0.160	0.036	0.153	0.018	0.148	0.005	0.147	0.001
	0.4	0.445	0.133	0.421	0.070	0.401	0.018	0.396	0.004
	0.8	0.833	0.422	0.757	0.233	0.691	0.065	0.673	0.014
	1.6	1.055	0.855	0.934	0.563	0.793	0.198	0.741	0.050
	3.2	1.000	0.945	0.988	0.887	0.859	0.492	0.752	0.160

$E_1/E_2 = 20$	$\frac{R}{H_2}$	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.014	0.006	0.011	0.003	0.010	0.001	0.010	0.000
	0.2	0.051	0.024	0.042	0.010	0.036	0.003	0.035	0.001
	0.4	0.170	0.091	0.135	0.040	0.114	0.010	0.110	0.002
	0.8	0.472	0.319	0.352	0.144	0.279	0.037	0.261	0.008
	1.6	0.975	0.826	0.702	0.421	0.508	0.127	0.451	0.031
	3.2	1.099	1.083	0.974	0.823	0.709	0.358	0.571	0.105

$E_1/E_2 = 200$	$\frac{R}{H_2}$	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.2	0.014	0.010	0.008	0.004	0.006	0.001	0.005	0.000
	0.4	0.053	0.040	0.029	0.015	0.019	0.004	0.016	0.001
	0.8	0.181	0.150	0.095	0.056	0.056	0.015	0.046	0.003
	1.6	0.535	0.482	0.271	0.194	0.139	0.054	0.102	0.013
	3.2	1.045	1.007	0.624	0.529	0.302	0.181	0.184	0.049

(d'après JONES)

$\frac{\sigma_z}{p}$	$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.5$	$\frac{H_1}{H_2} = 1$
	$\Gamma = 0$	

$E_1/E_2 = 0.2$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.021	0.005	0.020	0.004	0.020	0.001	0.020	0.000
0.2	0.082	0.021	0.078	0.014	0.076	0.005	0.075	0.001	
0.4	0.275	0.081	0.268	0.054	0.258	0.018	0.254	0.004	
0.8	0.673	0.269	0.651	0.188	0.615	0.068	0.599	0.017	
1.6	0.926	0.602	0.882	0.490	0.789	0.218	0.734	0.060	
3.2	0.959	0.822	0.942	0.817	0.830	0.536	0.702	0.192	

$E_1/E_2 = 2$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.012	0.005	0.011	0.002	0.010	0.001	0.009	0.000
0.2	0.048	0.019	0.042	0.010	0.037	0.002	0.036	0.001	
0.4	0.172	0.075	0.147	0.037	0.128	0.010	0.123	0.002	
0.8	0.486	0.262	0.399	0.134	0.333	0.036	0.314	0.008	
1.6	0.913	0.676	0.710	0.387	0.527	0.120	0.469	0.029	
3.2	1.047	0.960	0.921	0.758	0.655	0.337	0.512	0.098	

$E_1/E_2 = 20$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.004	0.003	0.003	0.001	0.002	0.000	0.002	0.000
0.2	0.016	0.011	0.010	0.004	0.008	0.001	0.007	0.000	
0.4	0.062	0.042	0.038	0.016	0.027	0.004	0.024	0.001	
0.8	0.211	0.158	0.122	0.059	0.080	0.015	0.070	0.003	
1.6	0.582	0.497	0.316	0.201	0.180	0.055	0.142	0.013	
3.2	1.063	1.002	0.660	0.534	0.344	0.183	0.227	0.049	

$E_1/E_2 = 200$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.005	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	
0.4	0.018	0.015	0.007	0.005	0.004	0.001	0.003	0.000	
0.8	0.068	0.060	0.026	0.018	0.012	0.004	0.009	0.001	
1.6	0.230	0.212	0.086	0.067	0.034	0.017	0.021	0.004	
3.2	0.627	0.601	0.252	0.220	0.089	0.062	0.042	0.015	

(d'après JONES)

$\frac{\sigma_z}{p}$	$v_1 = v_2 = v_3 = 0.5$	$\frac{H_1}{H_2} = 2$
	$r = 0$	

$E_1/E_2 = 0.2$	$\frac{R}{H_2}$	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.005	0.002	0.005	0.002	0.004	0.001	0.004	0.000
	0.2	0.021	0.010	0.020	0.007	0.018	0.003	0.016	0.001
	0.4	0.082	0.038	0.076	0.028	0.067	0.010	0.062	0.002
	0.8	0.282	0.138	0.262	0.105	0.226	0.040	0.208	0.009
	1.6	0.689	0.408	0.635	0.331	0.519	0.137	0.456	0.034
	3.2	0.931	0.735	0.870	0.684	0.657	0.374	0.486	0.111

$E_1/E_2 = 2$	$\frac{R}{H_2}$	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.004	0.002	0.003	0.001	0.002	0.000	0.002	0.000
	0.2	0.014	0.009	0.010	0.004	0.007	0.001	0.006	0.000
	0.4	0.055	0.034	0.038	0.016	0.027	0.004	0.025	0.001
	0.8	0.197	0.127	0.135	0.060	0.094	0.015	0.083	0.003
	1.6	0.553	0.404	0.366	0.201	0.231	0.056	0.192	0.013
	3.2	0.966	0.832	0.674	0.512	0.370	0.178	0.255	0.046

$E_1/E_2 = 20$	$\frac{R}{H_2}$	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.005	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.4	0.021	0.017	0.009	0.005	0.005	0.001	0.004	0.000
	0.8	0.080	0.066	0.034	0.020	0.018	0.005	0.014	0.001
	1.6	0.266	0.231	0.109	0.074	0.050	0.019	0.035	0.004
	3.2	0.679	0.630	0.292	0.239	0.113	0.067	0.062	0.016

$E_1/E_2 = 200$	$\frac{R}{H_2}$	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
		$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.4	0.006	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.8	0.022	0.020	0.007	0.005	0.003	0.001	0.002	0.000
	1.6	0.082	0.077	0.024	0.020	0.008	0.005	0.004	0.001
	3.2	0.266	0.255	0.081	0.072	0.023	0.018	0.009	0.004

(d'après JONES)

3-4

$\frac{\sigma_z}{p}$	$v_1 = v_2 = v_3 = 0.5$	$\frac{H_1}{H_2} = 4$
	$\Gamma = 0$	

$E_1/E_2 = 0.2$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂
	0.1	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.2	0.006	0.003	0.005	0.003	0.003	0.001	0.003	0.000
	0.4	0.022	0.014	0.019	0.011	0.014	0.004	0.011	0.001
	0.8	0.084	0.053	0.074	0.044	0.052	0.017	0.041	0.004
	1.6	0.289	0.190	0.254	0.159	0.174	0.065	0.131	0.015
	3.2	0.701	0.519	0.621	0.455	0.400	0.210	0.264	0.052

$E_1/E_2 = 2$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂
	0.1	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.4	0.016	0.012	0.009	0.005	0.005	0.001	0.004	0.000
	0.8	0.063	0.048	0.035	0.021	0.018	0.005	0.014	0.001
	1.6	0.224	0.176	0.124	0.080	0.060	0.020	0.044	0.005
	3.2	0.607	0.509	0.341	0.254	0.150	0.073	0.093	0.017

$E_1/E_2 = 20$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂
	0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.4	0.007	0.006	0.002	0.002	0.001	0.000	0.001	0.000
	0.8	0.026	0.023	0.008	0.006	0.003	0.001	0.002	0.000
	1.6	0.097	0.088	0.031	0.024	0.011	0.005	0.007	0.001
	3.2	0.310	0.287	0.101	0.084	0.033	0.021	0.016	0.005

$E_1/E_2 = 200$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂	z = H ₁	z = H ₁ +H ₂
	0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.4	0.002	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.8	0.007	0.006	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
	1.6	0.026	0.024	0.006	0.006	0.002	0.001	0.001	0.000
	3.2	0.092	0.088	0.023	0.021	0.006	0.005	0.002	0.001

(d'après JONES)

$\frac{\sigma_z}{p}$	$v_1 = v_2 = v_3 = 0.5$	$\frac{H_1}{H_2} = 8$
	$r = 0$	

$E_1/E_2 = 0.2$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.4	0.006	0.004	0.005	0.004	0.003	0.001	0.001	0.000
	0.8	0.022	0.017	0.019	0.014	0.010	0.006	0.006	0.001
	1.6	0.086	0.066	0.073	0.056	0.039	0.023	0.022	0.005
	3.2	0.293	0.232	0.249	0.198	0.133	0.085	0.069	0.019

$E_1/E_2 = 2$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.4	0.005	0.004	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
	0.8	0.018	0.015	0.008	0.007	0.003	0.002	0.002	0.000
	1.6	0.069	0.059	0.033	0.026	0.012	0.006	0.006	0.001
	3.2	0.241	0.209	0.116	0.094	0.040	0.024	0.020	0.005

$E_1/E_2 = 20$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.4	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.8	0.008	0.007	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
	1.6	0.029	0.027	0.008	0.007	0.002	0.001	0.001	0.000
	3.2	0.108	0.101	0.029	0.026	0.008	0.006	0.003	0.001

$E_1/E_2 = 200$	R	$E_2/E_3 = 0.2$		$E_2/E_3 = 2$		$E_2/E_3 = 20$		$E_2/E_3 = 200$	
	H_2	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$	$z = H_1$	$z = H_1 + H_2$
	0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	0.8	0.002	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1.6	0.007	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	3.2	0.028	0.027	0.006	0.006	0.001	0.001	0.000	0.000

(d'après JONES)

3-4

BIBLIOGRAPHIE

Les tables du coefficient M_{3H_1} ont été établies par Jones [2]. Les coefficients M_{3H_3} ont été tirés de graphiques publiés par Ueshita et Meyerhof [4] et les valeurs des contraintes σ_z de tables publiées par Jones [1]. Signalons que les tables de contraintes de Jones [1], qui donnent également la valeur de σ_r , ont été mises sous formes d'abaques par Peattie [3] et que les tables de tassement de Jones [2] ont été représentées graphiquement par Thenn de Barros [5].

REFERENCES

- [1] A. JONES, "Tables of stresses in three-layer elastic systems", Highway Research Bull., 342 (1962), 176-214.
- [2] A. JONES, "The calculation of surface deflection for three-layer elastic systems", Symposium sur les routes expérimentales pour le calcul des chaussées, 8 (Lisbonne, Avril-Mai 1962), 1-27.
- [3] K.R. PEATTIE, "Stress and strain Factors for Three-Layer Elastic Systems", Highway Research Bulletin, 342 (1962), 215-253.
- [4] K. UESHITA and G.G. Meyerhof, "Deflection of multilayer soil systems", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 93 SM5 (September 1967), 257-282.
- [5] S. THENN DE BARROS, "Deflection Factor Charts for Two and Three-Layer Elastic Systems", Highway Research Record, 145 (1966) 83-108.

**FONDATION CIRCULAIRE
EXERÇANT UNE CHARGE NORMALE UNIFORME**

(Réservoirs, Radiers souples)
sur un sol dont le module augmente linéairement avec
la profondeur

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul direct du tassement.
- Calcul des contraintes.
- Tables.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le coefficient de Poisson, ν , du sol est constant et son module d'Young, E , augmente linéairement de la surface du sol ($z = 0$) jusqu'à l'infini ($z = \infty$) :

$$E = E_0 + \lambda z .$$

DEFINITION DE LA CHARGE

Une pression p est uniformément répartie sur une surface circulaire de rayon R à la surface du sol.

CALCUL DIRECT DU TASSEMENT

Le tassement de la surface du sol est donné par :

$$w = \frac{pR}{E_0} M_{\lambda z} = \frac{p}{\lambda} M'_{\lambda z}$$

avec :

$M_{\lambda z}$ et $M'_{\lambda z}$: coefficients sans dimensions dont la valeur au centre de la surface chargée est donnée dans un tableau en fonction de ν ,
 ν : coefficient de Poisson du sol.

On peut utiliser indistinctement l'une ou l'autre formule. Toutefois la première est plus commode pour les petites valeurs de $\lambda R/E_0$ et la seconde pour les grandes.

Exemple :

Considérons un réservoir de pétrole de 18 m (59 ft) de rayon exerçant sur le sol une charge uniforme de 0,8 bar (1 670 lb/sq.ft). Quel est le tassement de son centre sachant que les propriétés du sol sont $\nu = 0,3$, $E_0 = 11$ bars (23 000 lb/sq.ft) et $\lambda = 3$ bars/m = (1 900 lb/cu.ft).

Calculons le paramètre :

$$\lambda R/E_0 = 3 \times 18/11 \approx 5 \approx (1\,900 \times 59)/23\,000 .$$

On lit alors dans le tableau :

$$M_{\lambda z} = 0,35 \quad \text{et} \quad M'_{\lambda z} = 1,75 .$$

D'où le tassement :

$$w = \frac{0,8 \times 18}{11} \times 0,35 = \frac{0,8}{3} \times 1,75 = 0,45 \text{ m}$$

$$\dot{w} = \frac{1\ 670 \times 59}{23\ 000} \times 0,35 = \frac{1\ 670}{1\ 900} \times 1,75 = 1,5 \text{ ft.}$$

Si le sol était homogène ($\lambda = 0$), le tassement serait donné par :

$$w = 1,82 \text{ pR/E.}$$

On peut alors calculer le module E qui donnerait le même tassement :

$$E = 1,82 \text{ pR/w} = 1,82 \times (0,8 \times 18)/0,45 = 58 \text{ bars}$$

$$= 1,82 \times (1\ 670 \times 59)/1,5 = 120\ 000 \text{ bars.}$$

Dans le sol étudié, ce module se trouve à la profondeur :

$$z = (E - E_0)/\lambda = (58 - 11)/3 = 15,5 \text{ m}$$

$$= (120\ 000 - 23\ 000)/1\ 900 = 51 \text{ ft.}$$

CALCUL DES CONTRAINTES

Nous ne donnons pas la valeur des contraintes. Toutefois, une bonne approximation en est donnée par le cas du sol homogène. La différence, dans la plupart des cas, semble n'être que de quelques pour-cent d'après les quelques calculs qui ont pu être faits. /

$M_{\lambda z}$	ν			
	0.2	0.3	0.4	0.5
$\lambda R/E_0$				
0	1.92	1.82	1.68	1.50
10^{-4}	1.87	1.75	1.62	1.35
0.1	1.67	1.56	1.42	1.2
0.3	1.44	1.31	1.16	1
0.5	1.26	1.16	1.02	0.8
1	0.99	0.90	0.78	0.6
5	0.39	0.35	0.30	0.24
10	0.23	0.21	0.18	0.13
∞	0	0	0	0

$M'_{\lambda z}$	ν			
	0.2	0.3	0.4	0.5
$\lambda R/E_0$				
0	0	0	0	0
10^{-4}	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	0.17	0.16	0.14	0.12
0.3	0.43	0.39	0.35	0.3
0.5	0.63	0.58	0.51	0.4
1	0.99	0.90	0.78	0.6
5	1.95	1.75	1.50	1.2
10	2.3	2.1	1.8	1.3
∞	∞	∞	∞	1.5

(d'après BOULON)

BIBLIOGRAPHIE

Les coefficients $M_{\lambda z}$ et $M'_{\lambda z}$ ont été obtenus à partir des résultats publiés par Boulon [1] que nous avons corrigés et complétés par interpolation et extrapolation pour $\nu = 0,5$.

REFERENCE

- [1] M. BOULON, "Etude numérique de problèmes axisymétriques, en élasticité linéaire, non linéaire et en élasto-plasticité, en milieux homogène et hétérogène", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Grenoble (1970).

**FONDATION CIRCULAIRE RIGIDE
EXERÇANT UNE CHARGE NORMALE CENTRÉE**

(Semelle, Radier, Plaque d'essai)
sur un sol homogène d'épaisseur infinie

SOMMAIRE

- Définition de la charge.
- Formules pour le calcul des contraintes.
- Formules pour le calcul des déplacements.
- Formules pour le calcul des déformations.
- Tables et graphiques.
- Expression des coefficients.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol est supposé homogène et d'épaisseur infinie ("*milieu semi-infini*"). Cependant, si ces deux hypothèses ne sont pas respectées, les valeurs données ici pour les contraintes (en particulier pour σ_z) constituent en général une bonne approximation des valeurs réelles (sauf peut-être dans le cas d'*une couche de sol dur reposant sur des terrains plus mous*). Pour les déplacements et les déformations, au contraire, il faut que les hypothèses (homogénéité et épaisseur infinie) soient respectées au moins avec une bonne approximation. Par exemple, dans le cas d'une couche de sol d'épaisseur H reposant sur un substratum peu déformable, il faut que H soit supérieure à 6 fois le rayon de la plaque pour que l'erreur commise sur le tassement soit inférieure à 10 %.

L'hypothèse du *contact sans frottements entre la plaque rigide et le sol* n'a aucune influence sur les valeurs des contraintes calculées en des points relativement éloignés de la fondation et n'a qu'une influence tout à fait négligeable sur les tassements, même au voisinage de la plaque. Au contraire, les déplacements radiaux du sol, au voisinage de la plaque seraient différents si les contraintes de contact étaient inclinées.

DEFINITION DE LA CHARGE

En supposant que le contact de la plaque rigide avec le sol se fait sans frottement, la distribution de la charge s'écrit (Fig. 1) :

$$(1) \quad p(r) = \frac{N}{2 \pi R^2 \sqrt{1 - (r^2/R^2)}}$$

avec :

N : force normale centrée exercée sur la plaque,

R : rayon de la plaque,

$p(r)$: pression au point d'abscisse r .

Ce type de charge est à peu près celui qui est exercé par une *semelle circulaire*, un *radier rigide* ou une *plaque d'essai*.

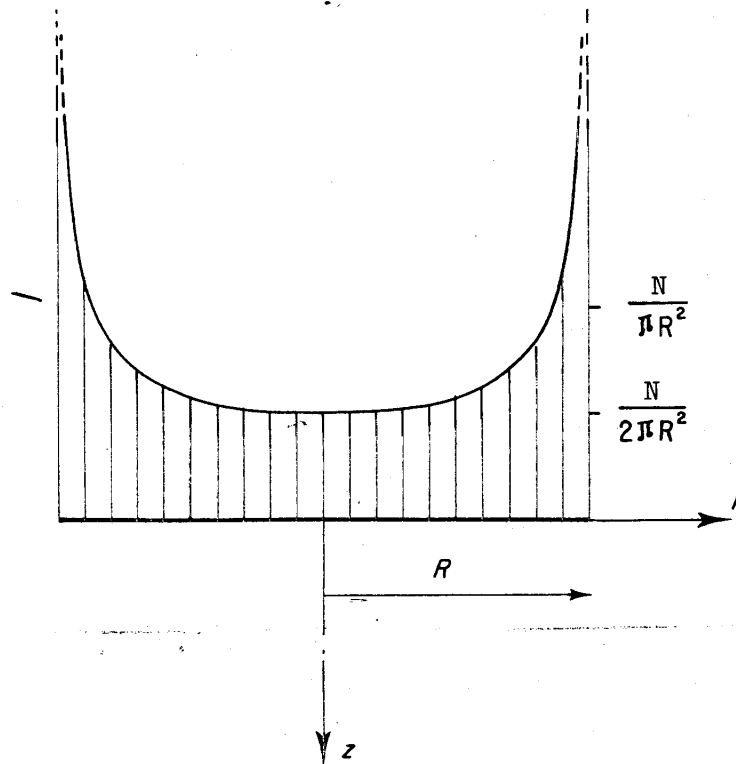


FIG. 1. — Représentation de la charge exercée par une fondation circulaire.

CALCUL DES CONTRAINTES

Les contraintes en tout point du sol sont données en coordonnées cylindriques par les formules suivantes :

$$(2) \quad \sigma_r = \frac{N}{\pi R^2} [\bar{K}_r - (1 - 2\nu) \bar{K}'_r]$$

$$(3) \quad \sigma_\theta = \frac{N}{\pi R^2} [\bar{K}_\theta - (1 - 2\nu) \bar{K}'_\theta]$$

$$(4) \quad \sigma_z = \frac{N}{\pi R^2} \bar{K}_z$$

$$(5) \quad \tau_{zr} = \frac{N}{\pi R^2} \bar{K}_{zr}$$

$$(6) \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$$

et la *contrainte moyenne* est donnée par :

$$(7) \quad \sigma_m = \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{N}{\pi R^2} \bar{N}'_z$$

avec :

N : force normale centrée exercée sur la plaque,

R : rayon de la plaque,

ν : coefficient de Poisson du sol,

\bar{K} et \bar{N} : coefficients sans dimensions donnés dans les tables en fonction de z/R et r/R ,

r, z : coordonnées du point où l'on calcule les contraintes.

Exemple 1 :

Considérons une semelle circulaire de 3 m (10 ft) de diamètre supportant une charge de 150 tonnes (330 000 lb). Quelle est la contrainte σ_z à 0,75 m (2,5 ft) de profondeur à la verticale du bord ?

Pour $r/R = 1$ et $z/R = 0,5$: $\bar{K}_z = 0,509$,

d'où :

$$\sigma_z = \frac{150 \times 9\,810}{\pi \times (1,5)^2} \times 0,509 = 1,06 \times 10^5 \text{ pascals} = 1,06 \text{ bar}$$

$$= \frac{330\,000}{\pi \times (5)^2} \times 0,509 = 2\,150 \text{ lb/sq.ft.}$$

(Notons qu'avec la même charge uniformément répartie, on aurait :

$$K_z = 0,418, \text{ soit : } \sigma_z = 0,87 \text{ bar} = 1\,800 \text{ lb/sq.ft.})$$

CALCUL DES DEPLACEMENTS

Le déplacement de tous les points du sol est donné, en coordonnées cylindriques, par les formules suivantes :

$$(8) \quad u_r = \frac{1+\nu}{E} \frac{N}{\pi R} \left[\bar{M}_r - (1-2\nu) \bar{M}'_r \right]$$

$$(9) \quad u_\theta = 0$$

$$(10) \quad w = \frac{1+\nu}{E} \frac{N}{\pi R} \left[\bar{M}_z + (1-2\nu) \bar{M}'_z \right].$$

En particulier, pour les points de la surface du sol ($z = 0$), on a le tassement suivant :

$$(11) \quad w = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \frac{N}{\pi R} \bar{M}_z$$

et, notamment, sous la fondation, $\bar{M}_z = \pi/4$:

$$(12) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{N}{2R} = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\pi R}{2} \frac{N}{\pi R^2}$$

avec :

ν : coefficient de Poisson du sol,

E : module d'Young du sol,

N : force normale centrée agissant sur la plaque circulaire rigide,

R : rayon de la plaque,

u_r : déplacement radial,

w : tassement,

\bar{M} : coefficients sans dimensions donnés dans les tableaux en fonction de z/R et r/R ,

r, z : coordonnées du point où l'on calcule le déplacement.

Exemple 2 :

Considérons un radier circulaire rigide de 5,5 m (18 ft) de rayon, supportant une charge de 1 200 tonnes (2 640 000 lb) et reposant sur un sol homogène sur une épaisseur d'au moins six fois le rayon, de module d'Young $E = 60$ bars (125 000 lb/sq.ft) et de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. Quel est le tassement du radier et quel est le déplacement horizontal d'un point P de coordonnées $r = 3,3$ m (11 ft) et $z = 2,75$ m (9 ft) ?

Calculons d'abord le tassement :

$$w = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{N}{2R} = \frac{0,91}{60 \times 10^5} \times \frac{1\,200 \times 9\,810}{2 \times 5,5}$$

$$w = 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

$$w = \frac{0,91}{125\,000} \times \frac{2\,640\,000}{2 \times 18} = 0,5 \text{ ft}$$

Calculons ensuite le déplacement latéral :

pour $r/R = 0,6$ et $z/R = 0,5$

$$\bar{M}_r = 0,061 \quad \text{et} \quad \bar{M}'_r = 0,121$$

$$(1 + \nu) \left[\bar{M}_r - (1 - 2\nu) \bar{M}'_r \right] = 1,3 (0,061 - 0,4 \times 0,121) \\ = 0,017 .$$

D'où :

$$u_r = \frac{1\,200 \times 9\,810 \times 0,017}{\pi \times 5,5 \times 60 \times 10^5} = 0,002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

$$u_r = \frac{2\,640\,000 \times 0,017}{\pi \times 18 \times 125\,000} = 0,007 \text{ ft} .$$

CALCUL DES DEFORMATIONS

Les déformations, en tout point du sol, sont données, en coordonnées cylindriques, par les formules suivantes :

$$(13) \quad \epsilon_r = \frac{1 + \nu}{E} \frac{N}{\pi R^2} \left[\bar{N}_r - (1 - 2\nu) \bar{K}'_\theta \right]$$

$$(14) \quad \epsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{E} \frac{N}{\pi R^2} \left[\bar{N}_\theta - (1 - 2\nu) \bar{K}'_r \right]$$

$$(15) \quad \epsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} \frac{N}{\pi R^2} \left[\bar{N}_z - (1 - 2\nu) \bar{N}'_z \right]$$

$$(16) \quad \gamma_{zr} = - \frac{1 + \nu}{E} \frac{N}{\pi R^2} \bar{K}_{zr}$$

$$(17) \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$$

et la *dilatation cubique* est donnée par :

$$(18) \quad \epsilon = - \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \frac{N}{\pi R^2} \bar{N}'_z$$

avec :

- N : force normale centrée exercée sur la fondation,
 ν : coefficient de Poisson du sol,
 E : module d'Young du sol,
 R : rayon de la fondation circulaire rigide,
 \bar{K} et \bar{N} : coefficients sans dimensions donnés dans les tableaux en fonction de z/R et r/R ,
 z, r : coordonnées du point où l'on calcule les déformations.

Exemple 3 :

Quelle est la variation de volume au point P de l'exemple précédent ?

Pour $r/R = 0,6$ et $z/R = 0,5$: $\bar{N}'_z = 0,398$, d'où :

$$\epsilon = - \frac{2 \times 1,3 \times 0,4}{60 \times 10^5} \frac{1\ 200 \times 9\ 810}{\pi \times (5,5)^2} 0,398$$

$$= - 0,0085 = - 0,85 \%$$

$$\epsilon = - \frac{2 \times 1,3 \times 0,4 \times 2\ 640\ 000}{125\ 000 \times \pi \times (18)^2} = - 0,0085$$

(signe moins : diminution de volume).

TABLES ET GRAPHIQUES

- Calcul des contraintes

Coefficients : $\bar{K}_r, \bar{K}'_r, \bar{K}_\theta, \bar{K}'_\theta, \bar{K}_z, \bar{K}_{zr}$: pp. 292 à 303.

- Calcul des déplacements

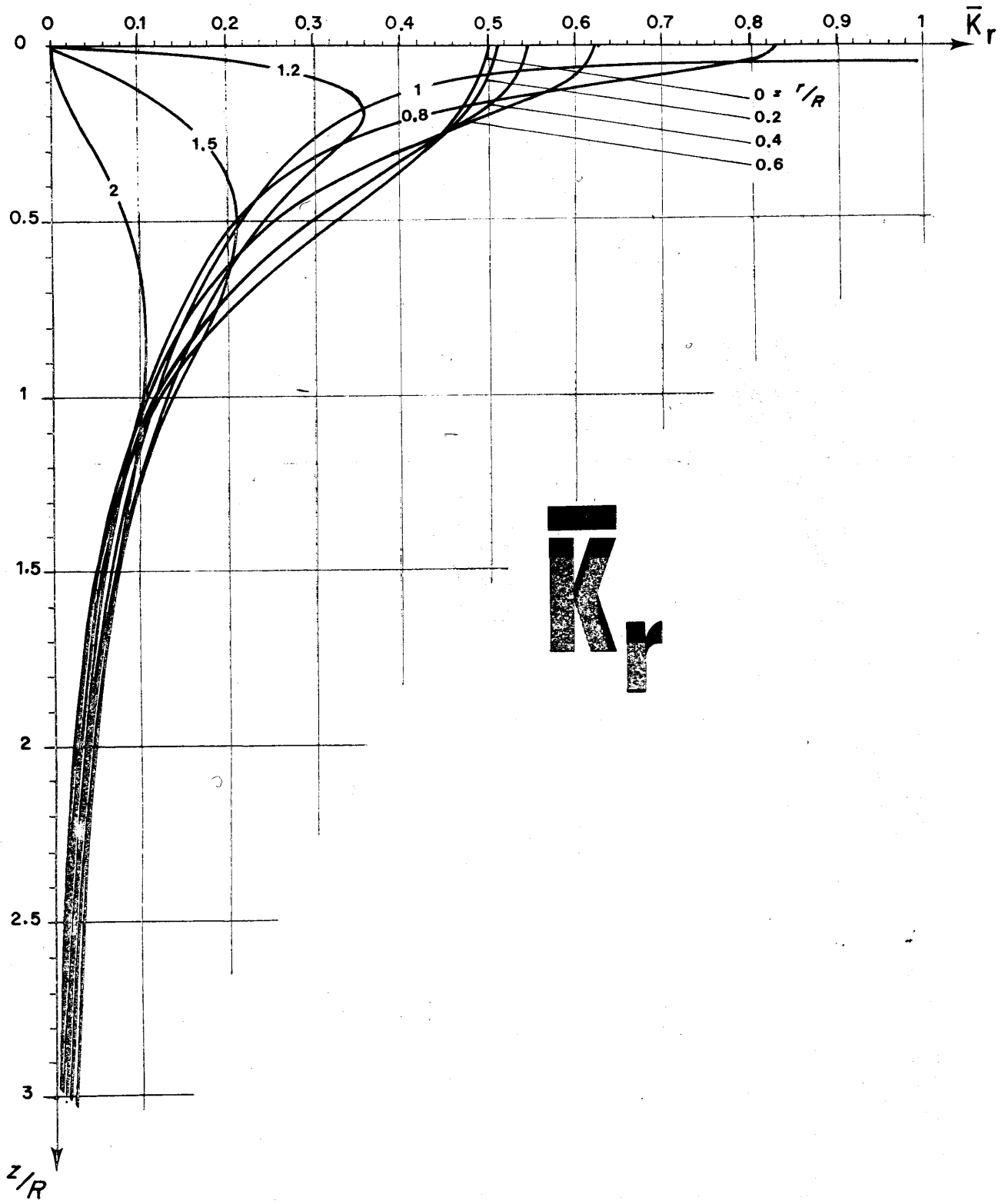
Coefficients : $\bar{M}_r, \bar{M}'_r, \bar{M}_z, \bar{M}'_z$: pp. 304 à 307.

- Calcul des déformations

Coefficients : $\bar{N}_r, \bar{N}_\theta, \bar{N}_z, \bar{N}'_z$: pp. 308 à 311.

K_r	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0.500	0.510	0.546	0.625	0.833	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.490	0.499	0.528	0.584	0.658	0.437	0.304	0.087	0.026	0.006	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.462	0.467	0.480	0.490	0.431	0.329	0.359	0.153	0.050	0.013	0.005	0.003	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
0.3	0.421	0.421	0.417	0.393	0.311	0.277	0.323	0.190	0.071	0.019	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
0.4	0.372	0.368	0.353	0.314	0.250	0.243	0.280	0.203	0.087	0.024	0.010	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000
0.5	0.320	0.314	0.294	0.256	0.213	0.215	0.243	0.201	0.099	0.029	0.012	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000
0.6	0.270	0.264	0.244	0.212	0.186	0.192	0.214	0.191	0.106	0.034	0.014	0.007	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
0.7	0.225	0.219	0.202	0.179	0.164	0.172	0.189	0.178	0.109	0.037	0.016	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
0.8	0.186	0.181	0.168	0.152	0.145	0.153	0.167	0.164	0.110	0.041	0.018	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
0.9	0.153	0.149	0.140	0.130	0.128	0.137	0.149	0.149	0.108	0.043	0.020	0.010	0.006	0.004	0.003	0.001	0.001
1	0.125	0.123	0.117	0.112	0.113	0.122	0.133	0.136	0.105	0.045	0.021	0.011	0.007	0.004	0.003	0.001	0.001
1.2	0.084	0.083	0.082	0.083	0.088	0.097	0.106	0.112	0.096	0.048	0.024	0.013	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001
1.5	0.047	0.048	0.050	0.054	0.060	0.068	0.076	0.083	0.079	0.048	0.026	0.015	0.009	0.006	0.004	0.002	0.001
2	0.020	0.021	0.023	0.027	0.032	0.038	0.044	0.051	0.055	0.042	0.027	0.017	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002
2.5	0.010	0.010	0.012	0.015	0.018	0.022	0.026	0.032	0.037	0.035	0.025	0.017	0.012	0.008	0.006	0.003	0.002
3	0.005	0.005	0.007	0.008	0.011	0.013	0.016	0.020	0.025	0.027	0.022	0.017	0.012	0.009	0.006	0.004	0.002
4	0.002	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.007	0.009	0.012	0.016	0.016	0.014	0.011	0.009	0.007	0.004	0.003
5	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.006	0.009	0.011	0.010	0.009	0.008	0.006	0.004	0.003
6	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.006	0.007	0.008	0.007	0.007	0.006	0.004	0.003
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.004	0.005	0.005	0.006	0.005	0.004	0.003	0.003
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.002

n/R

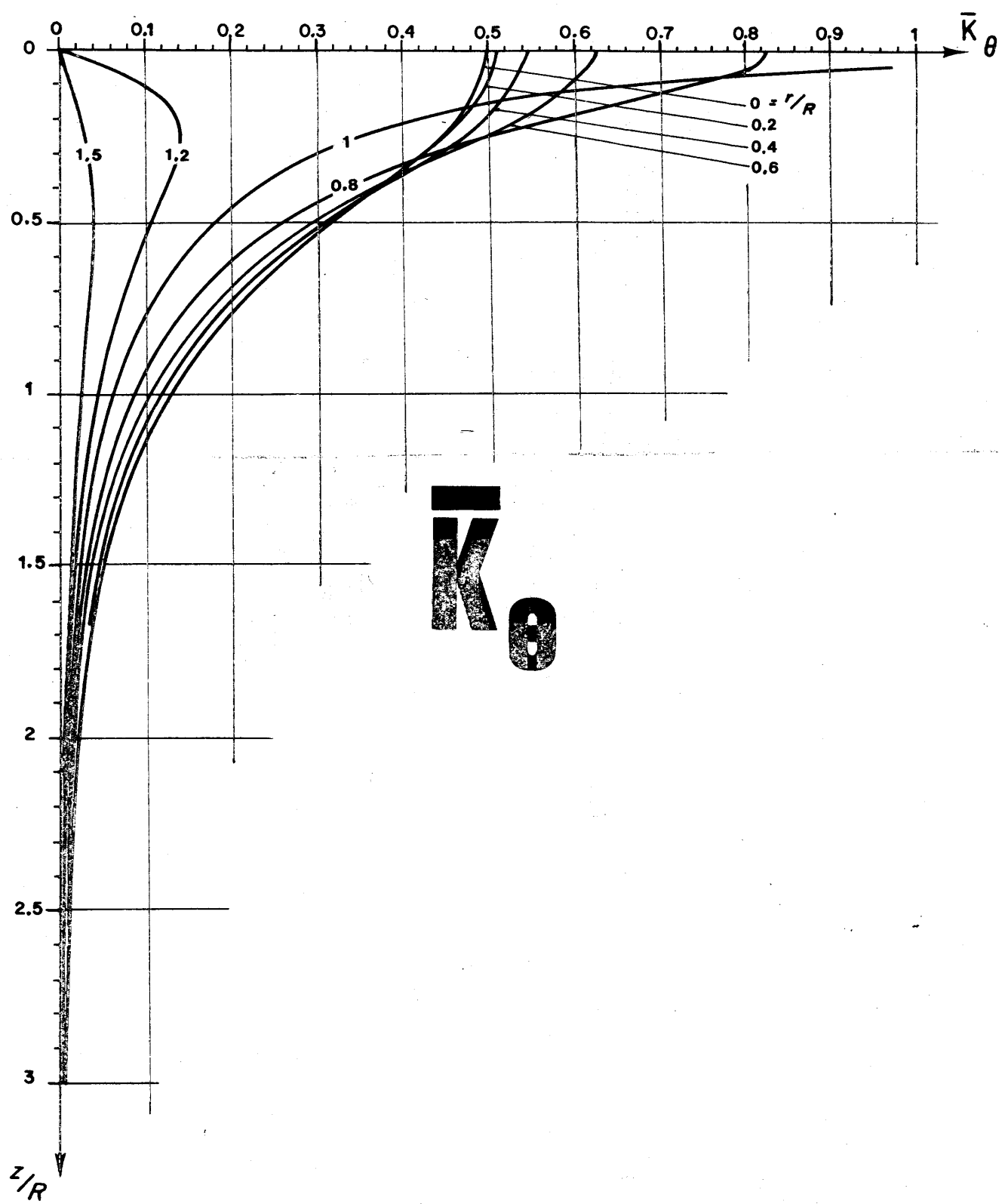


K' θ	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0.250	0.258	0.285	0.347	0.521	∞	-0.347	-0.222	-0.125	-0.056	-0.031	-0.020	-0.014	-0.010	-0.008	-0.005	-0.003
0.1	0.248	0.255	0.280	0.335	0.459	0.424	-0.149	-0.168	-0.108	-0.051	-0.030	-0.019	-0.013	-0.010	-0.008	-0.005	-0.003
0.2	0.240	0.246	0.266	0.303	0.352	0.242	-0.038	-0.119	-0.092	-0.047	-0.028	-0.018	-0.013	-0.010	-0.007	-0.005	-0.003
0.3	0.229	0.234	0.246	0.265	0.269	0.173	0.010	-0.080	-0.077	-0.043	-0.026	-0.018	-0.012	-0.009	-0.007	-0.005	-0.003
0.4	0.216	0.218	0.224	0.229	0.212	0.137	0.032	-0.050	-0.063	-0.039	-0.025	-0.017	-0.012	-0.009	-0.007	-0.005	-0.003
0.5	0.200	0.201	0.202	0.198	0.174	0.115	0.042	-0.028	-0.050	-0.035	-0.023	-0.016	-0.012	-0.009	-0.007	-0.004	-0.003
0.6	0.184	0.183	0.181	0.172	0.147	0.101	0.046	-0.012	-0.040	-0.032	-0.022	-0.015	-0.011	-0.008	-0.007	-0.004	-0.003
0.7	0.168	0.167	0.162	0.150	0.127	0.090	0.048	-0.001	-0.030	-0.028	-0.020	-0.014	-0.011	-0.008	-0.006	-0.004	-0.003
0.8	0.152	0.151	0.145	0.133	0.112	0.082	0.048	0.007	-0.022	-0.025	-0.019	-0.014	-0.010	-0.008	-0.006	-0.004	-0.003
0.9	0.138	0.136	0.130	0.118	0.100	0.075	0.048	0.013	-0.016	-0.022	-0.017	-0.013	-0.010	-0.008	-0.006	-0.004	-0.003
1	0.125	0.123	0.117	0.106	0.090	0.069	0.046	0.017	-0.010	-0.019	-0.016	-0.012	-0.009	-0.007	-0.006	-0.004	-0.003
1.2	0.102	0.101	0.095	0.087	0.074	0.059	0.044	0.022	-0.002	-0.014	-0.013	-0.011	-0.008	-0.007	-0.005	-0.004	-0.003
1.5	0.077	0.076	0.072	0.066	0.058	0.048	0.038	0.024	0.006	-0.008	-0.010	-0.009	-0.007	-0.006	-0.005	-0.004	-0.003
2	0.050	0.049	0.047	0.044	0.040	0.036	0.030	0.023	0.011	-0.001	-0.005	-0.006	-0.005	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002
2.5	0.034	0.034	0.033	0.031	0.029	0.027	0.024	0.019	0.012	0.002	-0.002	-0.004	-0.004	-0.004	-0.003	-0.003	-0.002
3	0.025	0.025	0.024	0.023	0.022	0.021	0.019	0.016	0.012	0.004	0.000	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.002	-0.002
4	0.015	0.015	0.014	0.014	0.014	0.013	0.012	0.011	0.009	0.005	0.002	0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
5	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.005	0.003	0.001	0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001
6	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	-0.000	-0.001	-0.001
7	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
8	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
9	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000
10	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.000

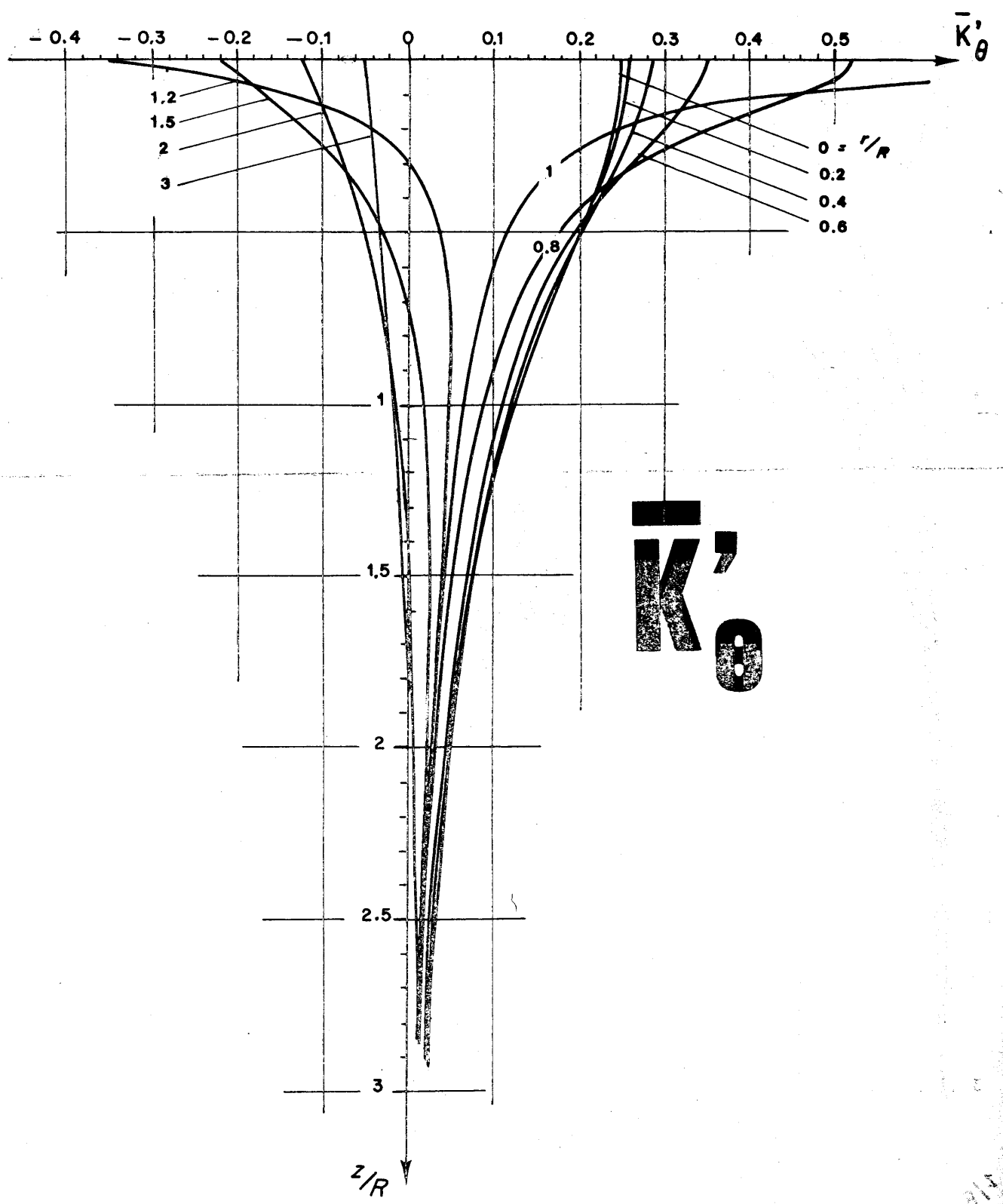
K θ	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0.500	0.510	0.546	0.625	0.833	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.490	0.500	0.531	0.598	0.741	0.697	0.101	0.015	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.462	0.469	0.491	0.531	0.574	0.433	0.139	0.028	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.421	0.425	0.436	0.448	0.434	0.311	0.138	0.036	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.372	0.373	0.374	0.367	0.331	0.236	0.124	0.040	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.320	0.319	0.313	0.297	0.256	0.185	0.108	0.041	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0.270	0.268	0.259	0.239	0.202	0.148	0.093	0.040	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0.225	0.222	0.212	0.192	0.161	0.120	0.079	0.037	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0.186	0.183	0.173	0.155	0.129	0.098	0.067	0.034	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.153	0.150	0.141	0.126	0.105	0.081	0.058	0.031	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.125	0.122	0.115	0.102	0.086	0.067	0.049	0.028	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.084	0.082	0.077	0.069	0.059	0.047	0.036	0.023	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	0.047	0.046	0.044	0.040	0.035	0.029	0.023	0.016	0.008	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.020	0.020	0.019	0.017	0.016	0.014	0.012	0.009	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.010	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

K θ

r/R



3-6



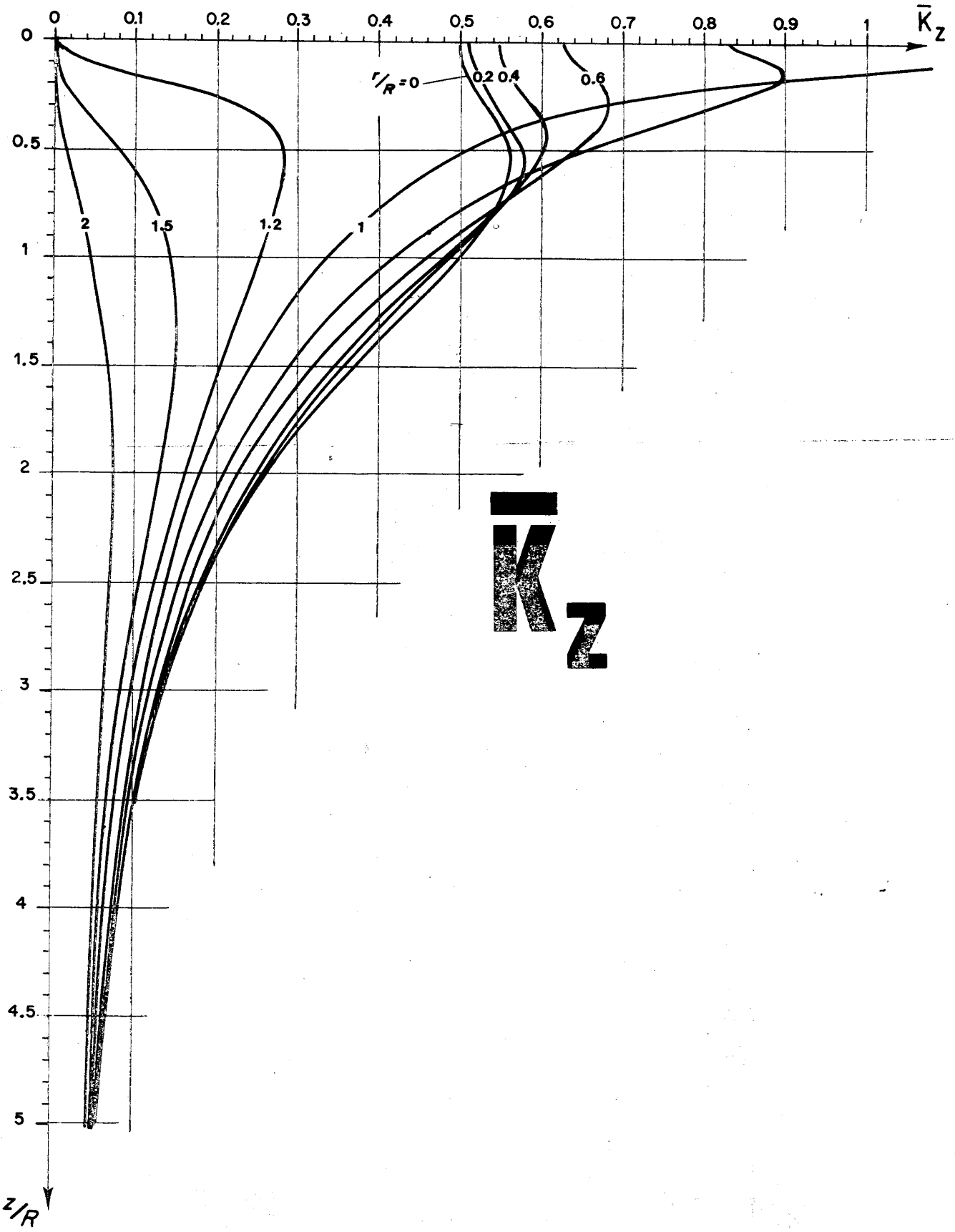
\bar{K}'_{θ}



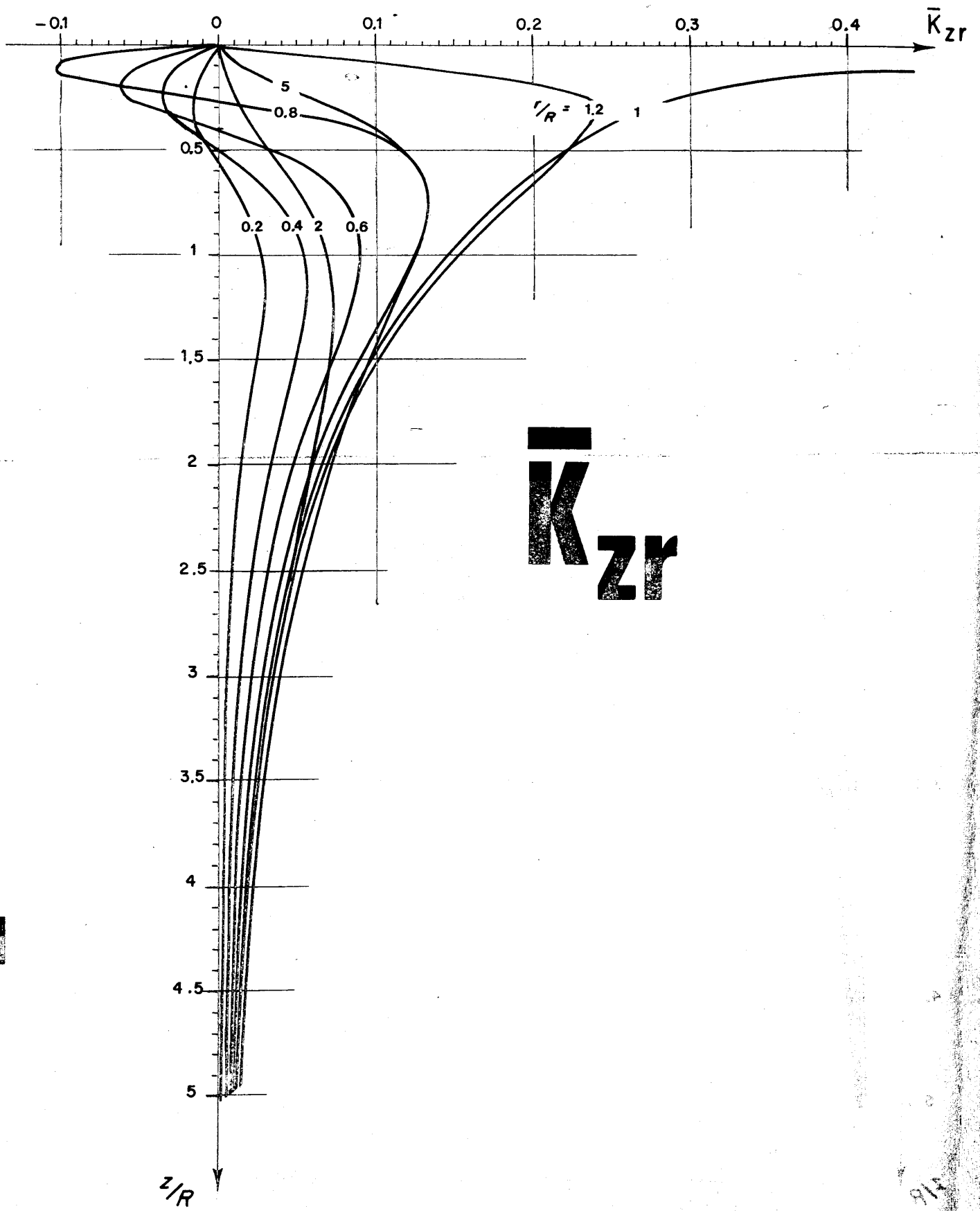
K'	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0.250	0.253	0.261	0.278	0.313	0.500	0.347	0.222	0.125	0.056	0.031	0.020	0.014	0.010	0.008	0.005	0.003
0.1	0.248	0.250	0.258	0.273	0.302	0.346	0.297	0.202	0.118	0.054	0.030	0.020	0.014	0.010	0.008	0.005	0.003
0.2	0.240	0.242	0.249	0.260	0.277	0.287	0.254	0.184	0.111	0.052	0.030	0.019	0.013	0.010	0.008	0.005	0.003
0.3	0.229	0.231	0.235	0.242	0.249	0.246	0.220	0.166	0.104	0.050	0.029	0.019	0.013	0.010	0.008	0.005	0.003
0.4	0.216	0.216	0.219	0.221	0.222	0.214	0.192	0.150	0.097	0.048	0.028	0.018	0.013	0.010	0.007	0.005	0.003
0.5	0.200	0.200	0.201	0.201	0.198	0.188	0.169	0.136	0.091	0.046	0.027	0.018	0.013	0.009	0.007	0.005	0.003
0.6	0.184	0.184	0.183	0.181	0.176	0.166	0.150	0.123	0.085	0.044	0.026	0.018	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003
0.7	0.168	0.167	0.166	0.163	0.157	0.148	0.134	0.112	0.079	0.042	0.026	0.017	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003
0.8	0.152	0.152	0.150	0.147	0.141	0.132	0.121	0.102	0.074	0.040	0.025	0.017	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003
0.9	0.138	0.138	0.136	0.132	0.126	0.119	0.109	0.093	0.069	0.039	0.024	0.016	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003
1	0.125	0.124	0.122	0.119	0.114	0.107	0.099	0.085	0.064	0.037	0.023	0.016	0.012	0.009	0.007	0.005	0.003
1.2	0.102	0.102	0.100	0.097	0.093	0.088	0.082	0.072	0.056	0.034	0.022	0.015	0.011	0.008	0.007	0.005	0.003
1.5	0.077	0.077	0.075	0.073	0.070	0.067	0.063	0.057	0.046	0.030	0.020	0.014	0.010	0.008	0.006	0.004	0.003
2	0.050	0.050	0.049	0.048	0.047	0.045	0.043	0.040	0.034	0.024	0.017	0.012	0.009	0.007	0.006	0.004	0.003
2.5	0.034	0.034	0.034	0.033	0.033	0.032	0.031	0.029	0.026	0.019	0.014	0.011	0.008	0.007	0.005	0.004	0.003
3	0.025	0.025	0.025	0.024	0.024	0.023	0.023	0.022	0.020	0.016	0.012	0.010	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003
4	0.015	0.015	0.015	0.014	0.014	0.014	0.014	0.013	0.013	0.011	0.009	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
5	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.004	0.003	0.002
6	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001
7	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.002	0.001
8	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001
9	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
10	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001

Kz	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0.500	0.510	0.546	0.625	0.833	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.505	0.516	0.553	0.641	0.884	1.176	0.039	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.518	0.530	0.572	0.669	0.883	0.825	0.148	0.013	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.534	0.547	0.591	0.681	0.808	0.669	0.228	0.033	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.550	0.562	0.602	0.670	0.721	0.574	0.267	0.058	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.560	0.571	0.601	0.643	0.645	0.509	0.281	0.082	0.013	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0.562	0.570	0.590	0.607	0.581	0.460	0.283	0.103	0.020	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0.556	0.561	0.570	0.569	0.528	0.421	0.279	0.118	0.027	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0.543	0.544	0.545	0.531	0.483	0.389	0.272	0.130	0.034	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.523	0.523	0.516	0.495	0.445	0.362	0.263	0.138	0.041	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.500	0.497	0.486	0.460	0.411	0.338	0.254	0.143	0.048	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.447	0.442	0.427	0.399	0.355	0.298	0.234	0.147	0.059	0.010	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	0.367	0.362	0.348	0.324	0.290	0.249	0.206	0.143	0.069	0.016	0.004	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.260	0.257	0.247	0.232	0.213	0.189	0.164	0.127	0.075	0.023	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.5	0.188	0.186	0.180	0.172	0.160	0.146	0.131	0.108	0.073	0.029	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
3	0.140	0.139	0.136	0.130	0.123	0.115	0.106	0.091	0.067	0.021	0.014	0.006	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
4	0.085	0.084	0.083	0.081	0.078	0.075	0.071	0.064	0.052	0.031	0.017	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000
5	0.056	0.056	0.055	0.054	0.053	0.052	0.050	0.046	0.040	0.028	0.018	0.011	0.007	0.004	0.003	0.001	0.001
6	0.040	0.040	0.039	0.039	0.038	0.037	0.036	0.035	0.031	0.024	0.017	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001
7	0.030	0.030	0.029	0.029	0.029	0.028	0.028	0.027	0.025	0.020	0.015	0.011	0.008	0.005	0.004	0.002	0.001
8	0.023	0.023	0.023	0.023	0.022	0.022	0.022	0.021	0.020	0.017	0.013	0.010	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001
9	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.017	0.017	0.016	0.014	0.012	0.009	0.007	0.006	0.004	0.003	0.001
10	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.014	0.014	0.013	0.012	0.010	0.009	0.007	0.006	0.004	0.003	0.002

n/R



3-6



K z/r		r/R																
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0	-0.010	-0.024	-0.050	-0.111	0.423	0.102	0.012	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0	-0.016	-0.036	-0.062	-0.049	0.316	0.210	0.042	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0	-0.017	-0.034	-0.039	0.034	0.269	0.240	0.075	0.015	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0	-0.013	-0.020	-0.003	0.087	0.240	0.236	0.102	0.025	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0	-0.005	-0.001	0.030	0.115	0.218	0.222	0.120	0.035	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0	0.003	0.017	0.056	0.129	0.201	0.207	0.130	0.044	0.008	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0	0.012	0.033	0.074	0.134	0.186	0.192	0.134	0.052	0.010	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0	0.018	0.044	0.084	0.134	0.173	0.178	0.134	0.059	0.012	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0	0.023	0.051	0.089	0.130	0.160	0.165	0.131	0.064	0.015	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0	0.026	0.055	0.090	0.125	0.149	0.153	0.127	0.068	0.017	0.006	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	0	0.028	0.056	0.085	0.111	0.128	0.132	0.117	0.072	0.022	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0	0.025	0.049	0.072	0.090	0.102	0.106	0.099	0.071	0.027	0.010	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2.5	0	0.017	0.034	0.049	0.060	0.059	0.073	0.073	0.061	0.031	0.014	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
3	0	0.008	0.015	0.022	0.032	0.047	0.051	0.053	0.050	0.031	0.017	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
4	0	0.004	0.008	0.011	0.014	0.017	0.019	0.022	0.024	0.022	0.016	0.011	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001
5	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010	0.011	0.013	0.015	0.016	0.014	0.011	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001
6	0	0.001	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.010	0.011	0.011	0.009	0.007	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001
7	0	0.001	0.002	0.002	0.002	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.008	0.008	0.007	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002
8	0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002
9	0	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.005	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
10	0	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.002	0.002	0.002

3-6

6

M		r/R																
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	0.001	0.003	0.006	0.016	0.073	0.057	0.029	0.014	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
0.2	0	0.004	0.009	0.019	0.044	0.096	0.092	0.055	0.028	0.012	0.006	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
0.3	0	0.008	0.018	0.035	0.067	0.108	0.110	0.076	0.041	0.017	0.010	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001
0.4	0	0.012	0.028	0.050	0.083	0.115	0.119	0.091	0.052	0.023	0.013	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001
0.5	0	0.016	0.036	0.061	0.092	0.118	0.123	0.101	0.062	0.028	0.016	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002	0.002	0.002
0.6	0	0.020	0.042	0.068	0.097	0.119	0.125	0.107	0.070	0.033	0.019	0.012	0.008	0.006	0.003	0.002	0.002	0.002
0.7	0	0.022	0.046	0.073	0.099	0.118	0.124	0.111	0.077	0.037	0.021	0.014	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002	0.002
0.8	0	0.024	0.049	0.075	0.098	0.116	0.122	0.112	0.082	0.042	0.024	0.016	0.011	0.008	0.006	0.004	0.003	0.003
0.9	0	0.025	0.050	0.075	0.097	0.112	0.119	0.112	0.085	0.045	0.027	0.017	0.012	0.009	0.007	0.004	0.003	0.003
1	0	0.025	0.050	0.074	0.094	0.109	0.115	0.111	0.088	0.049	0.029	0.019	0.013	0.010	0.008	0.005	0.003	0.003
1.2	0	0.024	0.047	0.069	0.087	0.100	0.107	0.107	0.090	0.054	0.034	0.022	0.016	0.012	0.009	0.006	0.004	0.004
1.5	0	0.021	0.041	0.060	0.075	0.087	0.094	0.097	0.089	0.059	0.039	0.027	0.019	0.014	0.011	0.007	0.005	0.005
2	0	0.016	0.031	0.045	0.057	0.067	0.074	0.080	0.080	0.062	0.045	0.032	0.024	0.018	0.014	0.009	0.007	0.007
2.5	0	0.012	0.023	0.034	0.043	0.051	0.058	0.065	0.069	0.061	0.047	0.036	0.027	0.021	0.017	0.011	0.008	0.008
3	0	0.009	0.018	0.026	0.033	0.040	0.046	0.052	0.058	0.056	0.047	0.038	0.030	0.024	0.019	0.013	0.010	0.010
4	0	0.006	0.011	0.016	0.021	0.026	0.030	0.035	0.042	0.046	0.043	0.038	0.032	0.027	0.022	0.016	0.012	0.012
5	0	0.004	0.007	0.011	0.014	0.018	0.021	0.025	0.030	0.036	0.037	0.035	0.031	0.027	0.024	0.018	0.014	0.014
6	0	0.003	0.005	0.008	0.010	0.013	0.015	0.018	0.023	0.029	0.031	0.031	0.029	0.027	0.024	0.019	0.015	0.015
7	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010	0.011	0.014	0.018	0.023	0.026	0.027	0.027	0.025	0.023	0.019	0.016	0.016
8	0	0.002	0.003	0.005	0.006	0.007	0.009	0.011	0.014	0.019	0.022	0.023	0.024	0.023	0.022	0.019	0.016	0.016
9	0	0.001	0.002	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.011	0.016	0.019	0.020	0.021	0.021	0.020	0.018	0.016	0.016
10	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.013	0.016	0.018	0.019	0.019	0.019	0.018	0.016	0.016

n/R

M'	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0	0.051	0.104	0.167	0.250	0.500	0.417	0.333	0.250	0.167	0.125	0.100	0.083	0.071	0.063	0.050	0.042
0.1	0	0.030	0.103	0.164	0.241	0.346	0.356	0.304	0.236	0.161	0.122	0.098	0.082	0.070	0.062	0.049	0.041
0.2	0	0.048	0.099	0.156	0.222	0.287	0.305	0.275	0.221	0.155	0.119	0.096	0.081	0.069	0.061	0.049	0.041
0.3	0	0.046	0.094	0.145	0.199	0.246	0.263	0.249	0.208	0.149	0.115	0.094	0.079	0.068	0.060	0.048	0.041
0.4	0	0.043	0.087	0.133	0.178	0.214	0.230	0.225	0.194	0.143	0.112	0.092	0.078	0.067	0.059	0.048	0.040
0.5	0	0.040	0.080	0.121	0.158	0.188	0.203	0.204	0.181	0.138	0.109	0.090	0.076	0.066	0.059	0.047	0.040
0.6	0	0.037	0.073	0.109	0.141	0.166	0.181	0.185	0.169	0.132	0.106	0.088	0.075	0.065	0.058	0.047	0.040
0.7	0	0.033	0.066	0.098	0.126	0.148	0.161	0.168	0.158	0.127	0.103	0.086	0.074	0.064	0.057	0.046	0.039
0.8	0	0.030	0.060	0.088	0.113	0.132	0.145	0.153	0.148	0.121	0.100	0.084	0.072	0.063	0.056	0.046	0.039
0.9	0	0.028	0.054	0.079	0.101	0.119	0.131	0.140	0.138	0.116	0.097	0.082	0.071	0.062	0.055	0.045	0.039
1	0	0.025	0.049	0.071	0.091	0.107	0.118	0.128	0.129	0.111	0.094	0.080	0.069	0.061	0.055	0.045	0.038
1.2	0	0.020	0.040	0.058	0.074	0.088	0.098	0.108	0.112	0.102	0.088	0.076	0.067	0.059	0.053	0.044	0.038
1.5	0	0.015	0.030	0.044	0.056	0.067	0.076	0.085	0.092	0.089	0.080	0.071	0.063	0.056	0.051	0.043	0.036
2	0	0.010	0.020	0.029	0.037	0.045	0.052	0.059	0.068	0.072	0.068	0.062	0.057	0.052	0.047	0.040	0.035
2.5	0	0.007	0.014	0.020	0.026	0.032	0.037	0.043	0.051	0.058	0.058	0.055	0.051	0.047	0.044	0.038	0.033
3	0	0.005	0.010	0.015	0.019	0.023	0.027	0.033	0.040	0.047	0.049	0.048	0.046	0.043	0.040	0.036	0.032
4	0	0.003	0.006	0.009	0.011	0.014	0.017	0.020	0.025	0.032	0.036	0.037	0.037	0.036	0.034	0.031	0.028
5	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.009	0.011	0.014	0.017	0.023	0.027	0.029	0.030	0.030	0.029	0.028	0.026
6	0	0.001	0.003	0.004	0.005	0.007	0.008	0.010	0.013	0.017	0.021	0.023	0.024	0.025	0.025	0.024	0.023
7	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.013	0.016	0.018	0.020	0.021	0.021	0.021	0.021
8	0	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.010	0.013	0.015	0.017	0.018	0.018	0.019	0.019
9	0	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.006	0.008	0.011	0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.017
10	0	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.007	0.009	0.010	0.012	0.013	0.014	0.015	0.015

M Z	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.493	0.365	0.262	0.170	0.126	0.101	0.084	0.072	0.063	0.051	0.042
0.1	0.785	0.785	0.785	0.784	0.781	0.706	0.499	0.367	0.262	0.170	0.126	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.2	0.783	0.783	0.781	0.777	0.761	0.672	0.509	0.371	0.264	0.170	0.127	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.3	0.777	0.776	0.773	0.763	0.733	0.644	0.512	0.376	0.266	0.171	0.127	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.4	0.768	0.766	0.759	0.743	0.704	0.621	0.510	0.381	0.268	0.172	0.127	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.5	0.754	0.751	0.741	0.720	0.676	0.599	0.504	0.385	0.271	0.172	0.127	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.6	0.736	0.732	0.720	0.695	0.650	0.580	0.496	0.386	0.274	0.173	0.128	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.7	0.715	0.711	0.697	0.670	0.624	0.561	0.487	0.386	0.276	0.175	0.128	0.102	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.8	0.692	0.687	0.672	0.644	0.601	0.543	0.477	0.385	0.278	0.176	0.129	0.102	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.9	0.664	0.663	0.647	0.619	0.578	0.525	0.467	0.382	0.280	0.177	0.129	0.102	0.085	0.072	0.063	0.050	0.042
1	0.643	0.638	0.622	0.595	0.557	0.509	0.456	0.379	0.280	0.178	0.130	0.103	0.085	0.072	0.063	0.050	0.042
1.2	0.593	0.589	0.574	0.550	0.517	0.478	0.434	0.369	0.281	0.180	0.131	0.103	0.085	0.073	0.063	0.050	0.042
1.5	0.525	0.521	0.509	0.490	0.465	0.435	0.402	0.352	0.277	0.182	0.133	0.105	0.086	0.073	0.064	0.051	0.042
2	0.432	0.429	0.422	0.410	0.394	0.374	0.353	0.319	0.265	0.184	0.136	0.106	0.087	0.074	0.064	0.051	0.042
2.5	0.363	0.361	0.356	0.348	0.338	0.325	0.311	0.288	0.249	0.182	0.137	0.108	0.089	0.075	0.065	0.051	0.043
3	0.311	0.310	0.307	0.301	0.294	0.286	0.276	0.260	0.231	0.177	0.137	0.109	0.090	0.076	0.066	0.052	0.043
4	0.240	0.240	0.238	0.236	0.232	0.228	0.223	0.214	0.198	0.163	0.133	0.109	0.091	0.078	0.067	0.053	0.044
5	0.195	0.195	0.194	0.192	0.190	0.188	0.185	0.180	0.170	0.148	0.125	0.106	0.090	0.078	0.068	0.054	0.044
6	0.164	0.163	0.163	0.162	0.161	0.160	0.158	0.155	0.148	0.133	0.117	0.102	0.088	0.077	0.068	0.054	0.045
7	0.141	0.141	0.141	0.140	0.139	0.138	0.137	0.135	0.131	0.120	0.108	0.096	0.085	0.076	0.067	0.054	0.045
8	0.124	0.124	0.123	0.123	0.123	0.122	0.121	0.120	0.117	0.109	0.100	0.091	0.082	0.074	0.066	0.054	0.045
9	0.110	0.110	0.110	0.110	0.109	0.109	0.108	0.107	0.105	0.100	0.093	0.085	0.078	0.071	0.065	0.054	0.045
10	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.098	0.098	0.097	0.096	0.091	0.086	0.080	0.074	0.068	0.063	0.053	0.045

n/R

M' Z	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.785	0.493	0.365	0.262	0.170	0.126	0.101	0.084	0.072	0.063	0.051	0.042
0.1	0.736	0.735	0.731	0.723	0.705	0.629	0.485	0.363	0.261	0.170	0.126	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.2	0.687	0.685	0.678	0.665	0.635	0.566	0.466	0.358	0.260	0.169	0.126	0.101	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.3	0.640	0.637	0.629	0.611	0.578	0.519	0.443	0.350	0.258	0.169	0.126	0.100	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.4	0.595	0.592	0.582	0.563	0.531	0.481	0.421	0.341	0.255	0.168	0.126	0.100	0.084	0.072	0.063	0.050	0.042
0.5	0.554	0.550	0.540	0.521	0.490	0.448	0.399	0.331	0.251	0.167	0.125	0.100	0.083	0.071	0.063	0.050	0.042
0.6	0.515	0.512	0.502	0.483	0.456	0.420	0.378	0.320	0.247	0.166	0.125	0.100	0.083	0.071	0.062	0.050	0.042
0.7	0.480	0.477	0.467	0.450	0.426	0.394	0.359	0.309	0.242	0.165	0.124	0.100	0.083	0.071	0.062	0.050	0.042
0.8	0.448	0.445	0.436	0.421	0.399	0.372	0.342	0.297	0.237	0.163	0.124	0.099	0.083	0.071	0.062	0.050	0.042
0.9	0.419	0.416	0.408	0.394	0.375	0.352	0.326	0.287	0.232	0.162	0.123	0.099	0.083	0.071	0.062	0.050	0.042
1	0.393	0.390	0.383	0.370	0.354	0.333	0.311	0.276	0.226	0.160	0.122	0.099	0.083	0.071	0.062	0.050	0.042
1.2	0.347	0.345	0.339	0.330	0.317	0.301	0.284	0.257	0.215	0.156	0.121	0.098	0.082	0.071	0.062	0.050	0.042
1.5	0.294	0.293	0.288	0.282	0.273	0.262	0.250	0.230	0.199	0.150	0.118	0.096	0.081	0.070	0.062	0.050	0.041
2	0.232	0.231	0.229	0.225	0.220	0.214	0.206	0.195	0.175	0.139	0.112	0.093	0.079	0.069	0.061	0.049	0.041
2.5	0.190	0.190	0.188	0.186	0.183	0.179	0.175	0.167	0.154	0.128	0.106	0.090	0.077	0.067	0.060	0.049	0.041
3	0.161	0.161	0.160	0.158	0.156	0.154	0.151	0.146	0.137	0.117	0.100	0.086	0.075	0.066	0.059	0.048	0.040
4	0.122	0.122	0.122	0.121	0.120	0.119	0.118	0.115	0.111	0.099	0.088	0.078	0.069	0.062	0.056	0.046	0.040
5	0.099	0.099	0.098	0.098	0.098	0.097	0.096	0.095	0.092	0.085	0.078	0.071	0.064	0.058	0.053	0.045	0.038
6	0.083	0.083	0.082	0.082	0.082	0.081	0.081	0.080	0.079	0.074	0.069	0.064	0.059	0.054	0.050	0.043	0.037
7	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.070	0.070	0.069	0.068	0.065	0.062	0.058	0.054	0.050	0.047	0.041	0.036
8	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062	0.061	0.060	0.058	0.056	0.053	0.050	0.047	0.044	0.039	0.035
9	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.054	0.053	0.051	0.048	0.046	0.044	0.041	0.037	0.033
10	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.049	0.049	0.049	0.048	0.046	0.045	0.043	0.041	0.039	0.035	0.032

3-6

N/r		r/R																
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0.1	0.005	0	0.006	0.010	0.024	0	0.156	0	0.052	0	0.004	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.018	0.006	0.022	0.034	0.073	0.104	-0.144	-0.088	-0.032	-0.017	-0.008	-0.002	-0.001	-0.000	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000
0.3	0.038	0.043	0.064	0.115	0.206	0.306	-0.094	-0.103	-0.044	-0.012	-0.005	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000
0.4	0.059	0.066	0.090	0.136	0.184	0.206	-0.056	-0.103	-0.053	-0.016	-0.006	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000
0.5	0.080	0.087	0.109	0.143	0.159	0.159	-0.033	-0.093	-0.058	-0.019	-0.008	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000
0.6	0.097	0.103	0.120	0.141	0.137	0.137	-0.017	-0.080	-0.061	-0.021	-0.009	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000
0.7	0.110	0.115	0.126	0.135	0.120	0.120	-0.006	-0.067	-0.060	-0.024	-0.010	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000
0.8	0.119	0.122	0.127	0.127	0.108	0.108	0.002	-0.054	-0.058	-0.025	-0.012	-0.006	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001	-0.000	-0.000
0.9	0.124	0.125	0.126	0.120	0.098	0.098	0.008	-0.043	-0.055	-0.027	-0.013	-0.007	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001
1	0.125	0.125	0.123	0.113	0.090	0.090	0.012	-0.034	-0.051	-0.027	-0.013	-0.007	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001
1.2	0.121	0.119	0.113	0.100	0.079	0.079	0.019	-0.018	-0.041	-0.028	-0.015	-0.008	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001
1.5	0.107	0.104	0.097	0.085	0.068	0.068	0.026	-0.002	-0.027	-0.026	-0.016	-0.009	-0.006	-0.004	-0.003	-0.001	-0.001	-0.001
2	0.080	0.078	0.073	0.065	0.054	0.054	0.029	0.011	-0.010	-0.020	-0.015	-0.010	-0.007	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001
2.5	0.059	0.058	0.055	0.050	0.044	0.044	0.029	0.017	0.001	-0.013	-0.013	-0.010	-0.007	-0.005	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001
3	0.045	0.044	0.042	0.039	0.035	0.031	0.026	0.018	0.006	-0.007	-0.010	-0.009	-0.007	-0.005	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001
4	0.028	0.027	0.027	0.025	0.024	0.022	0.020	0.016	0.010	-0.000	-0.005	-0.006	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001
5	0.018	0.018	0.018	0.017	0.017	0.016	0.015	0.013	0.009	0.003	-0.001	-0.003	-0.004	-0.004	-0.003	-0.002	-0.002	-0.002
6	0.013	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.011	0.010	0.008	0.004	0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002
7	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.004	0.002	0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
8	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.004	0.002	0.001	-0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
9	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.003	0.001	0.000	-0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001
10	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001

N	r/R																
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.005	0.005	0.006	0.009	0.020	0.073	0.047	0.019	0.007	0.022	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.018	0.020	0.023	0.032	0.055	0.096	0.077	0.037	0.014	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.038	0.040	0.046	0.059	0.084	0.108	0.092	0.050	0.020	0.006	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.059	0.062	0.069	0.083	0.103	0.115	0.099	0.060	0.026	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.5	0.080	0.082	0.090	0.101	0.115	0.118	0.103	0.067	0.031	0.009	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.6	0.097	0.099	0.105	0.114	0.121	0.119	0.104	0.072	0.035	0.011	0.005	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
0.7	0.110	0.112	0.116	0.121	0.123	0.118	0.103	0.074	0.038	0.012	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
0.8	0.119	0.120	0.122	0.124	0.123	0.116	0.101	0.075	0.041	0.014	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
0.9	0.124	0.124	0.125	0.124	0.121	0.112	0.099	0.075	0.043	0.015	0.007	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
1	0.125	0.125	0.125	0.123	0.118	0.109	0.096	0.074	0.044	0.016	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
1.2	0.121	0.120	0.119	0.115	0.109	0.100	0.089	0.071	0.045	0.018	0.008	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
1.5	0.107	0.106	0.103	0.099	0.094	0.087	0.078	0.065	0.044	0.020	0.010	0.005	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
2	0.080	0.079	0.078	0.075	0.071	0.067	0.062	0.053	0.040	0.021	0.011	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
2.5	0.059	0.059	0.058	0.056	0.054	0.051	0.048	0.043	0.034	0.020	0.012	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
3	0.045	0.045	0.044	0.043	0.042	0.040	0.038	0.035	0.029	0.019	0.012	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001
4	0.028	0.028	0.027	0.027	0.026	0.026	0.025	0.023	0.021	0.015	0.011	0.008	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001
5	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018	0.017	0.016	0.015	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001
6	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.011	0.010	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001
7	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.005	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001
8	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001
9	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001
10	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001

		r/R																
N	Z	r/R																
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-0.010	-0.011	-0.016	-0.023	-0.033	-0.046	-0.109	0.033	0.009	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	-0.037	-0.041	-0.058	-0.105	-0.123	-0.254	0.067	0.052	0.018	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	-0.076	-0.083	-0.110	-0.174	-0.291	-0.250	0.002	0.053	0.023	0.006	0.003	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	-0.119	-0.128	-0.159	-0.220	-0.287	-0.223	-0.043	0.042	0.027	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	-0.160	-0.169	-0.198	-0.244	-0.274	-0.206	-0.070	0.026	0.027	0.009	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	-0.195	-0.203	-0.226	-0.255	-0.258	-0.194	-0.087	0.009	0.026	0.010	0.005	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.7	-0.221	-0.227	-0.242	-0.256	-0.244	-0.184	-0.097	-0.007	0.022	0.011	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.8	-0.238	-0.242	-0.249	-0.252	-0.231	-0.176	-0.103	-0.021	0.018	0.011	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.9	-0.247	-0.249	-0.251	-0.244	-0.219	-0.169	-0.107	-0.032	0.012	0.011	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
1	-0.250	-0.250	-0.247	-0.235	-0.208	-0.162	-0.108	-0.041	0.007	0.011	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
1.2	-0.242	-0.240	-0.232	-0.215	-0.188	-0.150	-0.109	-0.053	-0.004	0.010	0.006	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
1.5	-0.213	-0.210	-0.201	-0.184	-0.162	-0.134	-0.104	-0.062	-0.017	0.006	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
2	-0.160	-0.158	-0.151	-0.140	-0.126	-0.109	-0.091	-0.065	-0.030	-0.001	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
2.5	-0.119	-0.117	-0.113	-0.107	-0.098	-0.088	-0.077	-0.060	-0.035	-0.007	0.001	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
3	-0.090	-0.089	-0.087	-0.083	-0.077	-0.071	-0.064	-0.053	-0.035	-0.012	-0.002	0.001	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
4	-0.055	-0.055	-0.054	-0.052	-0.050	-0.047	-0.044	-0.039	-0.030	-0.015	-0.006	-0.002	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
5	-0.037	-0.037	-0.036	-0.036	-0.035	-0.033	-0.032	-0.029	-0.025	-0.015	-0.008	-0.004	-0.001	-0.000	0.000	0.000	0.001	0.001
6	-0.026	-0.026	-0.026	-0.026	-0.025	-0.024	-0.024	-0.022	-0.020	-0.014	-0.009	-0.005	-0.003	-0.001	-0.000	0.000	0.000	0.000
7	-0.020	-0.020	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.018	-0.017	-0.016	-0.012	-0.008	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000
8	-0.015	-0.015	-0.015	-0.015	-0.015	-0.014	-0.014	-0.014	-0.013	-0.010	-0.008	-0.006	-0.004	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000
9	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.011	-0.011	-0.010	-0.009	-0.007	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	0.000	0.000
10	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.009	-0.009	-0.009	-0.008	-0.006	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	0.000	0.000

N/R

N' Z		r/R															
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	7	8	10
0	0.500	0.510	0.546	0.625	0.833	∞	0	0.148	0	0.035	0	0.001	0	0.000	0	0.000	0
0.1	0.495	0.505	0.537	0.608	0.761	0.770	0.148	0.148	0.010	0.035	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.481	0.489	0.515	0.564	0.630	0.529	0.215	0.215	0.019	0.064	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.459	0.464	0.481	0.507	0.518	0.419	0.230	0.230	0.027	0.086	0.006	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.4	0.431	0.434	0.443	0.450	0.434	0.351	0.224	0.224	0.034	0.100	0.009	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.5	0.400	0.401	0.403	0.398	0.371	0.303	0.211	0.211	0.040	0.108	0.010	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.6	0.368	0.367	0.364	0.353	0.323	0.267	0.196	0.196	0.045	0.111	0.012	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
0.7	0.336	0.334	0.328	0.313	0.284	0.238	0.182	0.182	0.049	0.111	0.014	0.006	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
0.8	0.303	0.303	0.295	0.280	0.252	0.214	0.169	0.169	0.052	0.109	0.015	0.006	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
0.9	0.276	0.274	0.266	0.250	0.226	0.193	0.157	0.157	0.053	0.106	0.017	0.007	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000
1	0.250	0.247	0.239	0.225	0.203	0.176	0.145	0.145	0.054	0.102	0.018	0.008	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000
1.2	0.205	0.203	0.196	0.184	0.167	0.147	0.125	0.125	0.055	0.094	0.020	0.009	0.005	0.003	0.001	0.000	0.000
1.5	0.154	0.152	0.147	0.139	0.128	0.115	0.102	0.102	0.052	0.081	0.022	0.010	0.006	0.003	0.001	0.000	0.000
2	0.100	0.099	0.097	0.092	0.087	0.080	0.073	0.073	0.045	0.062	0.023	0.012	0.007	0.004	0.001	0.000	0.000
2.5	0.069	0.069	0.067	0.065	0.062	0.059	0.055	0.055	0.038	0.048	0.022	0.012	0.007	0.005	0.001	0.000	0.000
3	0.050	0.050	0.049	0.048	0.046	0.044	0.042	0.042	0.031	0.038	0.020	0.012	0.008	0.005	0.001	0.000	0.000
4	0.029	0.029	0.029	0.029	0.028	0.027	0.026	0.026	0.022	0.025	0.016	0.011	0.008	0.005	0.002	0.001	0.000
5	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.018	0.018	0.018	0.016	0.017	0.012	0.010	0.007	0.005	0.002	0.001	0.000
6	0.014	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.010	0.008	0.006	0.005	0.002	0.001	0.000
7	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.008	0.007	0.005	0.004	0.002	0.001	0.000
8	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.004	0.002	0.001	0.000
9	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.002	0.001	0.000
10	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000

EXPRESSION DES COEFFICIENTS

Sur les 14 coefficients, 8 se déduisent des 6 autres.

$$\bar{K}_r = \bar{N}'_z + \bar{N}_z + \frac{1}{\rho} \bar{M}_r$$

$$\bar{K}'_r = \frac{1}{\rho} \bar{M}'_r$$

$$\bar{K}_\theta = \bar{N}'_z - \frac{1}{\rho} \bar{M}_r$$

$$\bar{K}'_\theta = \bar{N}'_z - \frac{1}{\rho} \bar{M}'_r$$

$$\bar{K}_z = \bar{N}'_z - \bar{N}_z$$

$$\bar{K}_{zr} = \frac{\zeta \rho \sin(3\phi/2)}{2 A^{3/4}}$$

$$\bar{M}_r = \frac{\zeta \sqrt{1 + \zeta^2} \sin(\theta - \phi/2)}{2 \rho \sqrt[4]{A}}$$

$$\bar{M}'_r = \frac{1 - \sqrt[4]{A} \sin \phi/2}{2 \rho}$$

$$\bar{M}_z = \zeta \bar{N}'_z + \bar{M}'_z$$

$$\bar{M}'_z = \frac{1}{2} \text{Arc sin} \frac{2}{\sqrt{\zeta^2 + (1 + \rho)^2} + \sqrt{\zeta^2 + (1 - \rho)^2}}$$

$$\bar{N}_r = -\bar{N}_z - \frac{1}{\rho} \bar{M}_r$$

$$\bar{N}_\theta = \frac{1}{\rho} \bar{M}_r$$

$$\bar{N}_z = -\frac{\zeta \sqrt{1 + \zeta^2} \sin(3\phi/2 - \theta)}{2 A^{3/4}}$$

$$\bar{N}'_z = \frac{\sin \phi/2}{2 \sqrt[4]{A}}$$

avec :

$$A = (\rho^2 + \zeta^2 - 1)^2 + 4 \zeta^2 \quad \text{tg} \theta = 1/\zeta$$

$$\text{tg} \phi = \frac{2 \zeta}{\rho^2 + \zeta^2 - 1}$$

$$\rho = r/R \quad \zeta = z/R$$

Notons également les relations :

$$\bar{K}_r + \bar{K}_\theta + \bar{K}_z = 3 \bar{N}'_z \quad \bar{N}_r + \bar{N}_\theta + \bar{N}_z = 0$$

Expressions particulières sur l'axe (r = 0)

$$\bar{K}_r = \bar{K}_\theta = \frac{1}{2(1 + \zeta^2)^2}$$

$$\bar{K}'_r = \bar{K}'_\theta = \frac{1}{4(1 + \zeta^2)}$$

$$\bar{K}_z = \frac{1 + 3 \zeta^2}{2(1 + \zeta^2)^2}$$

$$\bar{K}_{zr} = \bar{M}_r = \bar{M}'_r = 0$$

$$\bar{M}_z = \frac{\zeta}{2(1+\zeta^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\zeta} \quad \bar{M}'_z = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\zeta}$$

$$\bar{N}_r = \bar{N}_\theta = \frac{\zeta^2}{2(1+\zeta^2)^2} \quad \bar{N}_z = -\frac{\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2} \quad \bar{N}'_z = \frac{1}{2(1+\zeta^2)}$$

Expressions particulières à la surface du sol ($z = 0$)

$$\bar{K}_r = \bar{K}_\theta = \bar{K}_z = \bar{N}'_z = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} & \text{pour } \rho \leq 1 \\ 0 & \text{pour } \rho \geq 1 \end{cases}$$

$$K'_r = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-\rho^2}}{2\rho^2} & \text{pour } \rho \leq 1 \\ \frac{1}{2\rho^2} & \text{pour } \rho \geq 1 \end{cases}$$

$$\bar{K}'_\theta = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-\rho^2}}{2\rho^2\sqrt{1-\rho^2}} & \text{pour } \rho \leq 1 \\ -\frac{1}{2\rho^2} & \text{pour } \rho \geq 1 \end{cases}$$

$$K_{zr} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \rho \neq 1 \\ \infty & \text{pour } \rho = 1 \end{cases}$$

$$\bar{M}_r = \bar{N}_r = \bar{N}_\theta = \bar{N}_z = 0$$

$$\bar{M}'_r = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-\rho^2}}{2\rho} & \text{pour } \rho \leq 1 \\ \frac{1}{2\rho} & \text{pour } \rho \geq 1 \end{cases}$$

$$\bar{M}_z = \bar{M}'_z = \begin{cases} \pi/4 & \text{pour } \rho \leq 1 \\ 1/2 \operatorname{Arcsin} 1/\rho & \text{pour } \rho \geq 1 \end{cases}$$

3-6

BIBLIOGRAPHIE

L'étude fondamentale de ce problème a été faite par Boussinesq [1], Sneddon [4, 5] et Harding [2]. Nous avons contrôlé que les tables que nous avons calculées et que nous donnons ici sont en bon accord avec les valeurs numériques présentées sous une autre forme par Prange [3].

REFERENCES

- [1] J. BOUSSINESQ, "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques". Gauthier-Villars (Paris, 1885), p. 155.
- [2] J.W. HARDING and I.N. SNEDDON, "The Elastic Stresses Produced by the Indentation of the Plane Surface of a Semi Infinite Elastic Solid by a Rigid Punch", Proc. Cambridge Phil. Soc., 41 (1945), 16-26.
- [3] B. PRANGE, "Ein Beitrag zum Problem der Spannungsmessung im Halbraum", Veröffentlichungen des Inst. Für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Fridericiana in Karlsruhe, Heft 18 (1965) p. 53.
- [4] I.N. SNEDDON, Proc. Cambridge Phil. Soc., 42 (1946), 29.
- [5] I.N. SNEDDON, "Fourier Transforms" Mc Graw Hill (1951), p. 455.

**FONDATION CIRCULAIRE RIGIDE EXERÇANT
UNE CHARGE NORMALE EXCENTRÉE**

(Semelle, Radier)
sur un sol homogène d'épaisseur infinie

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul du tassement.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol est supposé homogène sur une épaisseur infinie. En pratique, cette épaisseur doit être au moins égale à 6 fois le rayon pour que les valeurs données ici pour le tassement et la rotation soient valables. Notons que l'hypothèse du *contact sans frottements* entre la plaque rigide et le sol n'influe pratiquement pas sur les tassements : les valeurs données ici sont donc très voisines de celles que l'on pourrait calculer en tenant compte des contraintes de contact tangentielles.

DEFINITION DE LA CHARGE

En supposant que le contact de la plaque rigide avec le sol se fait sans frottements, la distribution de la charge s'écrit :

$$(1) \quad p(x, y) = \frac{N}{2 \pi R^2 \sqrt{1 - (r/R)^2}} \left[1 + (3 x E_x) / R^2 \right] \quad \text{pour } r \leq R$$

$$(2) \quad p(x, y) = 0 \quad \text{pour } r \geq R$$

avec :

N : force normale exercée sur la plaque et située dans le plan Ozx ,

E_x : excentricité de la force,

x, y : coordonnées du point de la surface,

R : rayon de la plaque,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cette distribution de charge est illustrée par la figure 1.

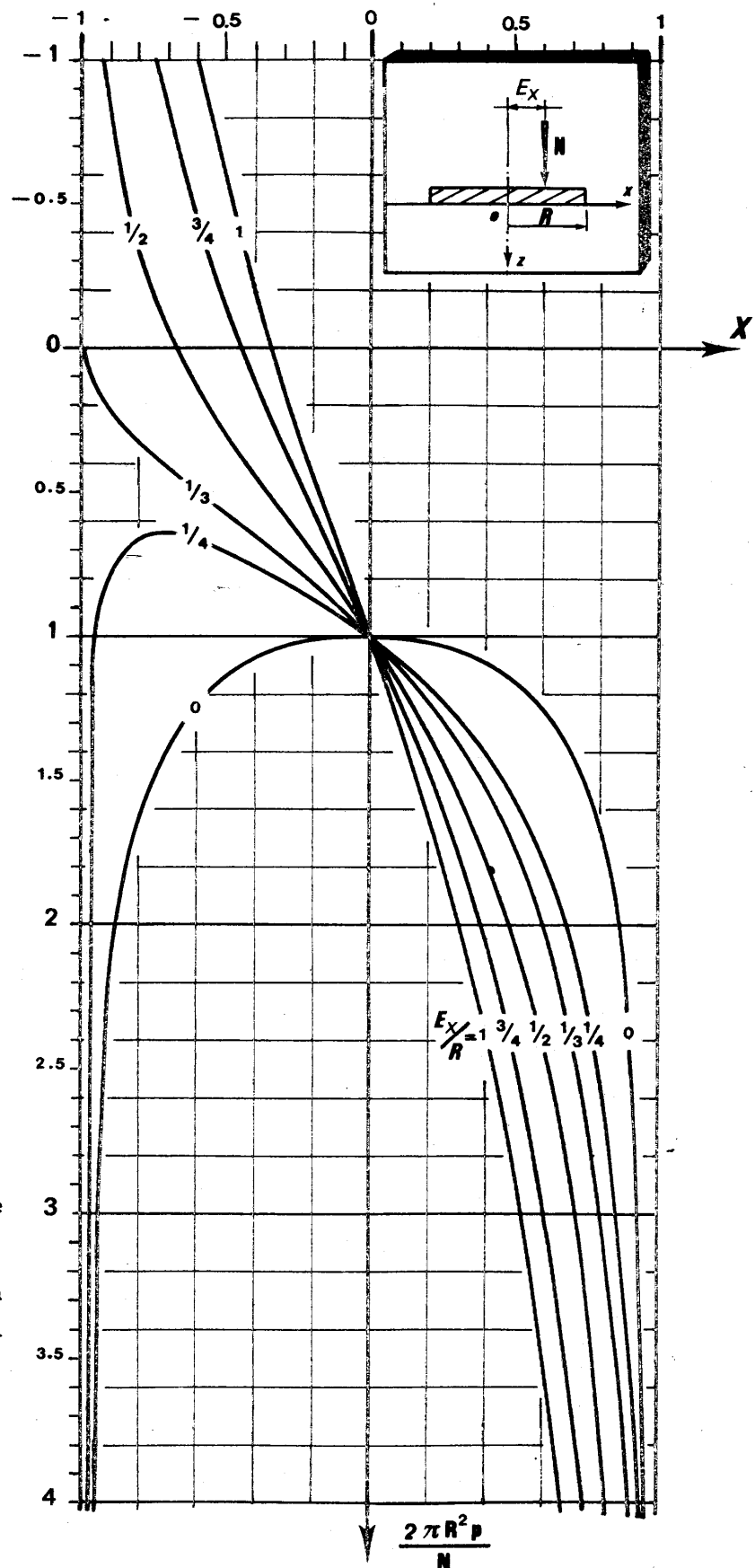


FIG. 1. — Coupe par le plan Ozx de la distribution de la charge p pour diverses valeurs de l'excentricité. On voit que lorsque la charge est appliquée à l'extérieur du tiers central la fondation se décolle du sol. La distribution indiquée n'est alors plus valable. Si la charge était uniformément répartie la limite serait constituée par le quart central.

CALCUL DU TASSEMENT

Le tassement des points du sol situés sous la plaque s'exprime par :

$$(3) \quad w(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{N}{2 R} \left(1 + 3 \frac{x E_x}{2 R^2} \right),$$

et la rotation de la plaque autour de l'axe Oy s'écrit :

$$(4) \quad \text{tg} \phi = \frac{3(1 - \nu^2)}{4 E} \frac{E_x N}{R^3}.$$

(On peut poser $M_x = E_x N = \text{moment.}$)

Exemple :

Quels sont le tassement et la rotation d'une fondation circulaire rigide de 10 m (33 ft) de rayon supportant une charge de 300 tonnes (660 000 lb) excentrée de 2 m (6,5 ft). Le sol est homogène sur une épaisseur de 100 m au moins et ses propriétés sont $E = 12 \text{ bars}$ (25 000 lb/sq.ft) et $\nu = 0,3$.

La formule donne directement :

$$w = \frac{0,91}{12 \times 10^5} \frac{300 \times 9\,810}{20} (1 + 6 x/200)$$

$$w = \frac{0,91}{25\,000} \frac{660\,000}{66} (1 + 0,9 x/100)$$

Pour $x = 0$ (centre du cercle) : $w = 0,11 \text{ m} = 0,36 \text{ ft}$.

Pour $x = R = 10 \text{ m} = 33 \text{ ft}$ (bord du cercle du côté de la charge) : $w = 0,14 \text{ m} = 0,47 \text{ ft}$.

Pour $x = -R$ (bord du cercle du côté opposé à la charge) : $w = 0,08 \text{ m} = 0,25 \text{ ft}$.

La rotation a pour valeur :

$$\text{tg} \phi = (0,14 - 0,11)/10 = (0,47 - 0,36)/33 = 0,003, \quad \text{soit } \phi \approx 0,2^\circ.$$

BIBLIOGRAPHIE

L'étude de ce problème et les formules données ici sont dues à Borowicka.

H. BOROWICKA, "Über ausmittig belastete, starre Platten auf elastisch - isotropem Untergrund", Ingenieur Archiv, 14 (1943), 1-8.

**FONDATION CIRCULAIRE RIGIDE EXERÇANT
UNE CHARGE NORMALE CENTRÉE**

(Semelle, Radier, Plaque d'essai)
sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul direct du tassement.
- Calcul des contraintes.
- Tables de valeurs numériques.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

La couche de sol homogène d'épaisseur H repose sur un substratum indéformable auquel elle adhère parfaitement.

DEFINITION DE LA CHARGE

La fondation est une plaque circulaire rigide et lisse, supportant une charge verticale centrée. La plaque étant lisse, les contraintes qui règnent à son contact avec le sol sont normales alors que pour une fondation réelle rugueuse elles sont inclinées. Toutefois cette différence n'affecte les tassements et les contraintes σ_z que de façon négligeable.

CALCUL DIRECT DU TASSEMENT

Le tassement de la fondation est donné par :

$$(1) \quad w = \frac{pR}{E} \bar{M}_H = \frac{N}{\pi RE} \bar{M}_H$$

avec :

- w : tassement,
- p : pression moyenne exercée par la fondation sur le sol,
- N : résultante des charges ($N = p\pi R^2$),
- R : rayon de la fondation,
- E : module d'Young du sol,
- \bar{M}_H : coefficient sans dimensions donné dans une table en fonction de ν et H/R ,
- ν : coefficient de Poisson du sol,
- H : épaisseur de la couche de sol.

Exemple 1 :

Quel est le tassement d'une cheminée de 350 tonnes (770 000 lb) reposant sur un radier rigide de 7 m (23 ft) de diamètre fondé sur une couche de 5 m (16,5 ft) d'épaisseur supportée par un substratum indéformable ? Le sol de la couche a pour module d'Young $E = 56$ bars (117 000 lb/sq.ft) et pour coefficient de Poisson, $\nu = 0,2$.

En interpolant pour $H/R = 1,4$, entre $H/R = 1$ et $H/R = 2$, on obtient dans la colonne $\nu = 0,2$ du tableau :

$$\bar{M}_H = 0,8 .$$

D'où :

$$w = \frac{350 \times 9\ 810}{\pi \times 3,5 \times 56} \times 0,8 = 0,045 \text{ m} = 4,5 \text{ cm}$$

$$w = \frac{770\ 000}{\pi \times 11,5 \times 117\ 000} \times 0,8 = 0,15 \text{ ft} .$$

Remarquons que ce résultat est très voisin de la valeur du "tassement moyen" obtenue, pour le même problème, dans une section précédente (1). Il est donc recommandé d'utiliser la formule du *tassement moyen* pour les valeurs de ν et H/R qui ne figurent pas dans le tableau de \bar{M}_H , plutôt que de faire des interpolations.

CALCUL DES CONTRAINTES

La valeur de la contrainte verticale σ_z sur l'axe de la fondation est donnée par la formule suivante :

$$(2) \quad \sigma_z = p \bar{K}_{Hz} = \frac{N}{\pi R^2} \bar{K}_{Hz}$$

avec :

p : pression moyenne exercée par la fondation sur le sol,

N : résultante des charges ($N = \pi R^2 p$),

R : rayon de la fondation,

\bar{K}_{Hz} : coefficient sans dimensions donné dans une table en fonction de H/R et z/H , pour $\nu = 0,5$ seulement,

H : épaisseur de la couche de sol,

z : cote du point de l'axe où l'on calcule σ_z ,

ν : coefficient de Poisson du sol.

Exemple 2 :

Considérons une semelle circulaire de 0,9 m (3 ft) de rayon supportant une charge de 20 tonnes (44 000 lb) et reposant sur une couche de sol de 1,8 m (6 ft) d'épaisseur. Quelle est la valeur de σ_z due à cette charge à 1,1 m (3,5 ft) de profondeur sous le centre de la fondation si le coefficient de Poisson du sol est 0,5 ?

(1) Section intitulée "Fondation circulaire exerçant une charge normale uniforme sur une couche de sol homogène d'épaisseur finie" (Section 3-2 du Chap. 3).

Pour $H/R = 2$ et $z/H = 0,6$, la table donne $\bar{K}_{Hz} = 0,561$. D'où :

$$\sigma_z = 0,561 \times \frac{20 \times 9\,810}{\pi \times (0,9)^2} = 43\,000 \text{ pascals} = 0,43 \text{ bar}$$

$$\sigma_z = 0,561 \times \frac{44\,000}{\pi \times 3^2} = 870 \text{ lb/sq.ft.}$$

\bar{M}_H		ν			
		0	0.2	0.4	0.5
H/R	0	0	0	0	0
	0.3	0.282	0.245	0.151	0.055
	0.5	0.440	0.385	0.255	0.133
	0.75	0.601	0.533	0.376	0.236
	1	0.737	0.658	0.483	0.334
	2	1.071	0.977	0.778	0.621
	5	1.375	1.297	1.079	0.923
	10	1.453	1.387	1.190	1.037
	∞	1.571	1.508	1.320	1.178

\bar{K}_{Hz}	$\nu=0.5$	H/R		
		0.5	1	2
z/H	0	1.096	0.780	0.515
	0.2	1.093	0.820	0.612
	0.4	1.060	0.828	0.625
	0.6	1.024	0.825	0.561
	0.8	0.990	0.783	0.479
	1	0.939	0.701	0.388

(d'après POULOS)

BIBLIOGRAPHIE

Les tables de \bar{M}_H et \bar{K}_{Hz} nous ont été communiquées personnellement par Poulos que nous remercions très vivement. On trouvera une étude générale de ce problème dans [1].

REFERENCE

- [1] H.G. POULOS, "The Behaviour of a Rigid Circular Plate Resting on a Finite Elastic Layer", Civil Engineering Transactions (Australia, October 1968), 213-219.

REMBLAI CONIQUE OU TRONCONIQUE

sur un sol homogène d'épaisseur infinie
(En plus de l'application aux remblais, les charges indiquées ici, ajoutées ou retranchées à une charge circulaire uniforme, permettent de représenter un grand nombre de distributions de contraintes de révolution susceptibles d'exister sous une fondation circulaire.)

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge exercée par le remblai sur le sol.
- Calcul direct du tassement
 - a) Remblai conique.
 - b) Remblai tronconique.
- Calcul des contraintes
 - a) Remblai conique.
 - b) Remblai tronconique.
- Tables et graphiques.
- Expression des coefficients.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol est supposé homogène et d'épaisseur infinie. Cependant, même si ces deux hypothèses ne sont pas respectées, les valeurs données ici pour les contraintes constituent, en général, une bonne approximation des valeurs réelles (ceci est surtout vrai pour σ_z). Pour les tassements, au contraire, il faut que les hypothèses soient le mieux possible satisfaites : ainsi, dans le cas d'une couche homogène reposant sur un substratum rigide, il faut que son épaisseur soit supérieure à cinq fois le rayon de la base du remblai.

DEFINITION DE LA CHARGE EXERCÉE PAR LE REMBLAI SUR LE SOL

On admet, en général, que le remblai exerce sur le sol une charge normale dont la distribution se déduit de la forme du remblai par une affinité de rapport γ (poids volumique du matériau en remblai) (Voir Fig. 1). Ainsi, cette distribution est triangulaire ou trapézoïdale selon que le remblai est conique ou tronconique.

On peut également considérer que la distribution est parabolique avec :

$$(1) \quad p = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{R'}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) \gamma h$$

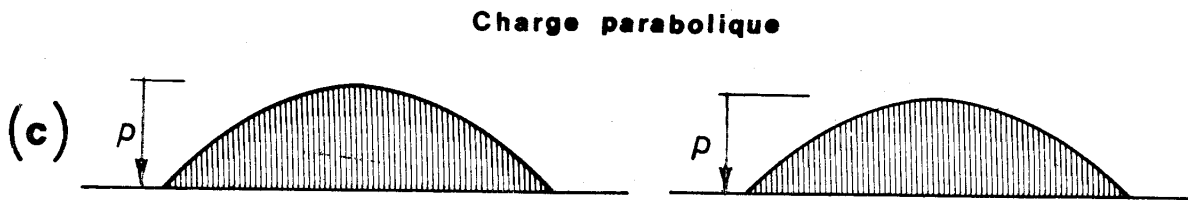
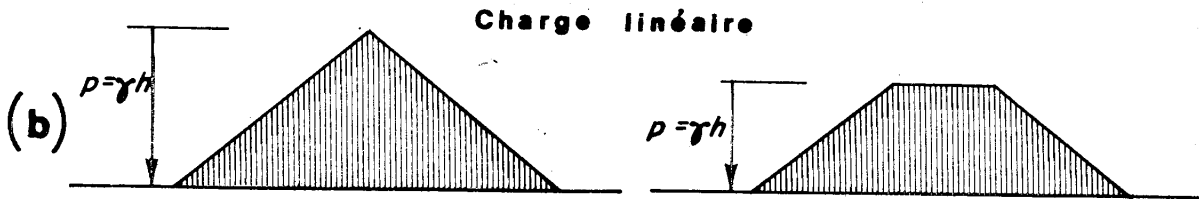
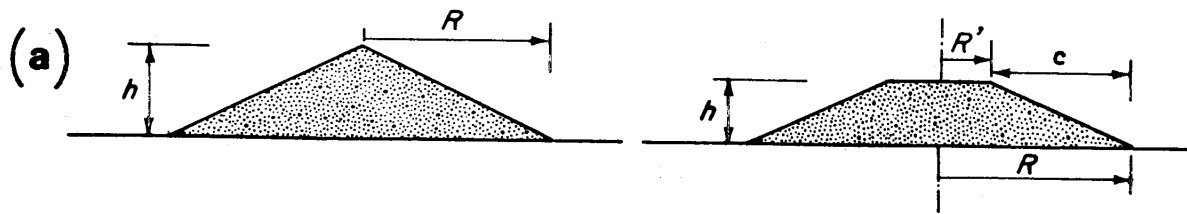
$$(2) \quad = 2 \left(1 - \frac{c}{R} + \frac{c^2}{3 R^2} \right) \gamma h$$

Toutefois, une telle distribution n'est possible que si :

$$(3) \quad 0 \leq R'/R \leq 0,366$$

avec :

- p : charge au centre de la base du remblai,
- R : rayon de la base du remblai,
- R' : rayon de la plate-forme du remblai ($R' = 0$ pour une section triangulaire),
- c : largeur de la pente du remblai ($c = R$ pour une section triangulaire),
- γ : poids volumique de sol en remblai,
- h : hauteur du remblai au centre.



(d)

R'/R	0	0,1	0,2	0,3	$1/3$	0,366
c/R	1	0,9	0,8	0,7	$2/3$	0,634
$P/\gamma h$	$2/3$	0,74	0,83	0,93	0,96	1

Valeur de p pour la charge parabolique.

FIG. 1. — Définition des remblais et de la charge qu'ils exercent sur le sol. A gauche : section triangulaire. A droite : section trapézoïdale. (a) Section des remblais. (b) Charge linéaire. (c) Charge parabolique. (d) Tableau établi à partir des formules (1) et (2).

CALCUL DIRECT DU TASSEMENTa) Remblai conique

On peut faire soit l'hypothèse classique d'une distribution linéaire de la charge soit l'hypothèse d'une distribution parabolique (voir Fig. 1).

Le tassement s s'exprime par l'une des deux formules suivantes :

$$(4) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} p R M^C \quad (\text{distribution linéaire } p = \gamma h)$$

$$(5) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} p R M^P \quad (\text{distribution parabolique : } p = 0,667 \gamma h)$$

avec :

E : module d'Young du sol supportant le remblai,

ν : coefficient de Poisson du sol supportant le remblai,

R : rayon du remblai,

p : charge au centre (voir Fig. 1),

M^C et M^P : coefficients sans dimensions donnés dans une table et un graphique en fonction de r ,

r : distance entre l'axe du remblai et le point dont on calcule le tassement (Fig. 2).

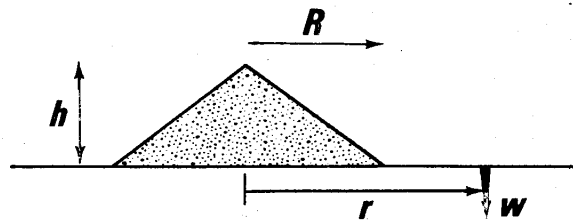


FIG. 2. — Position du point où l'on calcule le tassement dans le cas d'un remblai conique.

Exemple 1 :

Soit un remblai conique de 8 m (26 ft) de haut, de pente 2/1 et de densité 1,97 (123 lb/cu.ft), placé sur un sol de coefficient de Poisson 0,3 et de module moyen $E = 60$ bars (870 p.s.i.), sensiblement homogène sur au moins 60 m (200 ft) d'épaisseur. Calculer le tassement au centre et à 50 m (164 ft) du centre.

- Calculons d'abord la charge :

Hypothèse linéaire :

$$p = \gamma h = 1\,970 \times 9,81 \times 8 = 155\,000 \text{ pascals}$$

$$p = 1,55 \text{ bar}$$

$$p = 123 \times 26 = 3\,200 \text{ lb/sq.ft}$$

$$p = 22,3 \text{ psi .}$$

Hypothèse parabolique (d'après la formule 1 avec $R' = 0$) :

$$p = 0,667 \gamma h = 1,03 \text{ bar} = 14,9 \text{ psi .}$$

- Calcul du tassement au centre :

$$\text{Rayon : } R = 2 h = 16 \text{ m} = 52 \text{ ft .}$$

Hypothèse linéaire :

$$w = \frac{1 - \nu^2}{E} p R M^C = 0,375 M^C \text{ (en mètres)}$$

$$w = 1,22 M^C \text{ (en ft) .}$$

Hypothèse parabolique :

$$w = \frac{1 - \nu^2}{E} p R M^P = 0,25 M^P \text{ (en mètres)}$$

$$w = 0,81 M^P \text{ (en ft) .}$$

Au centre $M^C = 1$ et $M^P = 1,334$, d'où :

$$w = 37 \text{ cm} = 1,22 \text{ ft} \approx 15 \text{ inches (hypothèse linéaire),}$$

$$w = 33 \text{ cm} = 1,08 \text{ ft} \approx 13 \text{ inches (hypothèse parabolique).}$$

Le tassement au centre est donc environ de 35 cm (14 inches).

- Calcul du tassement à 50 m du centre :

$$M^C = R/3 r = 16/150 = 0,106$$

$$M^P = R/2 r = 16/100 = 0,16 .$$

Il en résulte :

$$w = 0,375 \times 0,106 = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm (hypothèses linéaires),}$$

$$w = 0,25 \times 0,16 = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm (hypothèse parabolique).}$$

A grande distance de la charge, le tassement obtenu ne dépend pas de l'hypothèse faite sur la distribution de la charge, ce qui est évident d'après le *principe de Saint Venant*.

b) Remblai tronconique

On peut faire l'hypothèse classique d'une distribution linéaire de la charge, ou bien l'hypothèse d'une distribution parabolique. Toutefois, cette dernière n'est possible que si :

$$0 \leq R'/R \leq 0,366 \text{ (Voir Fig. 1).}$$

• Hypothèse parabolique

Le calcul est analogue à celui du tassement dû à un remblai conique :

$$(6) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} p R M^P$$

avec :

E, ν : module d'Young et coefficient de Poisson du sol supportant le remblai,

R : rayon de base du remblai,

M^P : coefficient sans dimensions donné dans une table et un graphique en fonction de r ,

r : distance entre l'axe du remblai et le point dont on calcule le tassement,

p : charge au centre donnée par la formule (1) ou (2) :

$$p = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{R'}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) \gamma h$$

avec :

R' : rayon au sommet du remblai,

γ : poids volumique du matériau en remblai,

h : hauteur du remblai.

• Hypothèse linéaire (valable quel que soit R'/R).

Le calcul du tassement se fait à l'aide de la formule suivante :

$$(7) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{p R^2}{R - R'} \left[M^c(r/R) - (R'/R)^2 M^c(r/R') \right]$$

avec :

$$p = \gamma h,$$

γ : poids volumique du matériau en remblai,

h : hauteur du remblai,

E, ν : module d'Young et coefficient de Poisson du sol supportant le remblai,

R : rayon à la base du remblai,

R' : rayon au sommet du remblai,

M^C : coefficient donné en fonction de r dans le tableau et le graphique suivants,

r : distance à l'axe du remblai de point dont on calcule le tassement (Fig. 3).

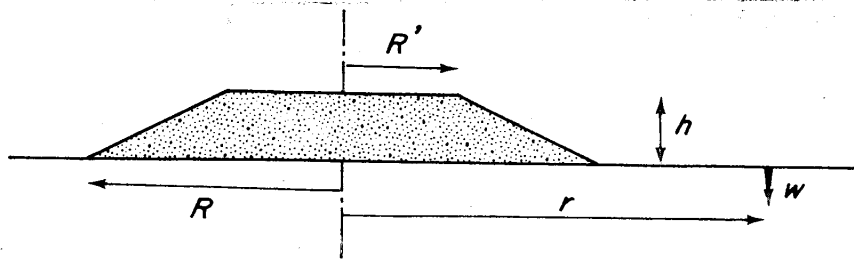


FIG. 3. — Position du point où l'on calcule le tassement dû à un remblai tronconique.

Cas particulier : Tassement du centre ($r = 0$)

$$(8) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} pR (1 + R'/R) .$$

Exemple 2 :

Considérons un remblai de 4 m (13 ft) de hauteur mais ayant même base et même pente que celui de l'exemple précédent. Quel est le tassement du bord ?

Ce remblai est donc tronconique avec $R = 16$ m et $R' = 8$ m. Le rapport R'/R étant supérieur à 0,366, la distribution parabolique est impossible.

— Calculons la charge :

$$p = 1\,970 \times 9,81 \times 4 = 77\,000 \text{ pascals}$$

$$= 0,77 \text{ bar}$$

$$= 123 \times 13 = 1\,600 \text{ lb/sq.ft.}$$

- Calcul du tassement :

$$M^c(r/R) = 0,372 \quad \text{car } r = R = 16 \text{ m}$$

$$M^c(r/R') = 0,167 \quad \text{car } r = 2 R' .$$

D'où, en utilisant la formule (7) : $w = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm} = 0,4 \text{ ft} .$

CALCUL DES CONTRAINTES

a) Remblai conique (Fig. 4)

On peut faire soit l'hypothèse classique d'une distribution linéaire de la charge, soit l'hypothèse d'une distribution parabolique (voir Fig. 1).

Les contraintes en tout point du massif supportant le remblai, sont données par les formules suivantes :

• Hypothèse linéaire :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = pK_z^c \\ \sigma_r = p \left[K_r^c - (1 - 2\nu) K_r'^c \right] \\ \sigma_\theta = p \left[K_\theta^c - (1 - 2\nu) K_\theta'^c \right] \\ \tau_{zr} = pK_{zr}^c \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

avec : $p = \gamma h$

• Hypothèse parabolique :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = pK_z^p \\ \sigma_r = p \left[K_r^p - (1 - 2\nu) K_r'^p \right] \\ \sigma_\theta = p \left[K_\theta^p - (1 - 2\nu) K_\theta'^p \right] \\ \tau_{zr} = pK_{zr}^p \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

avec : $p = 0,667 \gamma h$ (d'après la formule 1, avec $R' = 0$).

avec :

- p : charge exercée par le remblai au centre de sa base (différente selon l'hypothèse parabolique ou linéaire, voir Fig. 1),
 γ : poids volumique du sol en remblai,
 h : hauteur du remblai,
 R : rayon de la base du remblai,
 r : distance à l'axe du remblai du point où l'on calcule des contraintes,
 z : profondeur du point où l'on calcule les contraintes (Fig. 4),
 ν : coefficient de Poisson du sol supportant le remblai,
 K : coefficients sans dimensions donnés dans les tables en fonction de r et z .

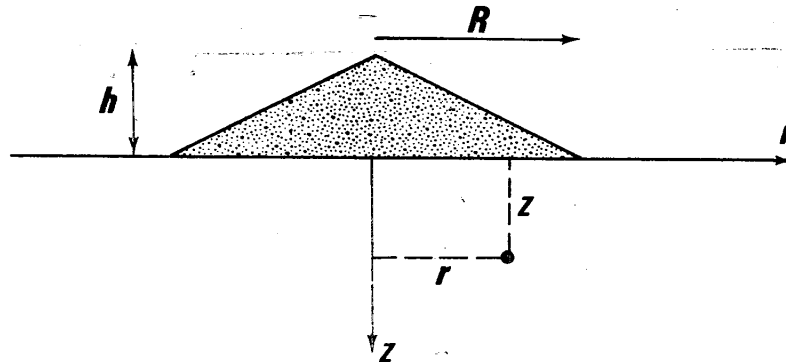


FIG. 4. — Position du point où l'on calcule les contraintes provoquées par un remblai conique.

Exemple 3 :

Soit un terril de mine conique de 35 m (115 ft) de haut, de pente 2,2/1 et de poids volumique $1,75 \text{ g/cm}^3$ (109 lb/cu.ft). Calculer les contraintes sous le centre du remblai à 70 m (230 ft) de profondeur sachant que le coefficient de Poisson du sol de fondation est $\nu = 0,3$.

— Calculons d'abord la charge :

Hypothèse linéaire :

$$p = \gamma h = 1\,750 \times 9,81 \times 35 = 600\,000 \text{ pascals} = 6 \text{ bars}$$

$$p = 109 \times 115 = 12\,500 \text{ lb/sq.ft} = 87 \text{ psi .}$$

Hypothèse parabolique :

$$p = 0,667 \gamma h = 4 \text{ bars (58 psi) (d'après la formule 1)}$$

- Calcul des contraintes :

sous le centre : $r = 0$

$$R = 35 \times 2,2 = 77 \text{ m (255 ft) et } z/R = 0,9$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } K_z^c &= 0,331 & K_z^p &= 0,464 \\ K_r^c &= K_\theta^c = 0,041 & K_r^p &= K_\theta^p = 0,066 \\ K_r^{c'} &= K_\theta^{c'} = 0,069 & K_r^{p'} &= K_\theta^{p'} = 0,099 \end{aligned}$$

d'où pour l'hypothèse linéaire :

$$\sigma_z = 6 \times 0,331 = 1,98 \text{ bar} = 87 \times 0,331 = 28,8 \text{ psi ,}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= 6[0,041 - 0,4 \times 0,069] = 0,078 \text{ bar} = \\ &= 87[0,041 - 0,4 \times 0,069] = 1,13 \text{ psi} \end{aligned}$$

et pour l'hypothèse parabolique :

$$\sigma_z = 4 \times 0,464 = 1,86 \text{ bar} = 58 \times 0,464 = 27 \text{ psi ,}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= 4[0,066 - 0,4 \times 0,099] = 0,064 \text{ bar} = \\ &= 58[0,066 - 0,4 \times 0,099] = 0,93 \text{ psi .} \end{aligned}$$

En conclusion, on peut retenir les valeurs suivantes :

$$\sigma_z \approx 1,9 \text{ bar} \approx 27,5 \text{ psi ,}$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta \approx 0,07 \text{ bar} \approx 1 \text{ psi .}$$

b) Remblai tronconique (Fig. 5)

On peut faire l'hypothèse classique d'une distribution linéaire de la charge, ou bien l'hypothèse d'une distribution parabolique. Toutefois, cette dernière n'est possible que si :

$$0 \leq R'/R \leq 0,366 \text{ (voir Fig. 1).}$$

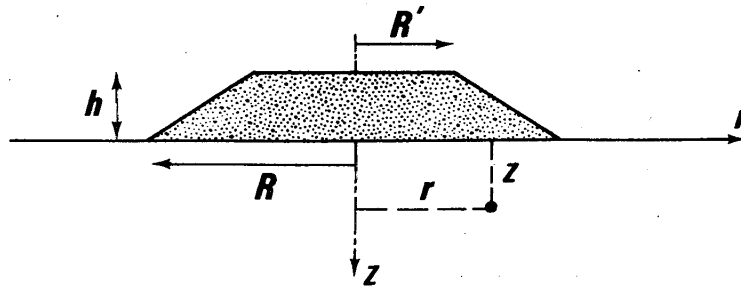


FIG. 5. — Position du point où l'on calcule les contraintes provoquées par un remblai tronconique.

• Hypothèse parabolique :

Les formules sont les mêmes que pour le remblai conique (formules 10),

avec :

$$p = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{R'}{R} + \frac{R'^2}{R^2} \right) \gamma h \text{ (formule 1).}$$

• Hypothèse linéaire (valable quel que soit R'/R) :

Les contraintes en tout point du massif supportant le remblai sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{pR}{R - R'} \left[K_z^c(r/R, z/R) - \frac{R'}{R} K_z^c(r/R', z/R') \right] \\ \sigma_r = \frac{pR}{R - R'} \left[K_r^c(r/R, z/R) - \frac{R'}{R} K_r^c(r/R', z/R') - \right. \\ \quad \left. - (1 - 2\nu) \left(K_r^c(r/R, z/R) - \frac{R'}{R} K_r^c(r/R', z/R') \right) \right] \\ \sigma_\theta = \frac{pR}{R - R'} \left[K_\theta^c(r/R, z/R) - \frac{R'}{R} K_\theta^c(r/R', z/R') \right. \\ \quad \left. - (1 - 2\nu) \left(K_\theta^c(r/R, z/R) - \frac{R'}{R} K_\theta^c(r/R', z/R') \right) \right] \\ \tau_{zr} = \frac{pR}{R - R'} \left[K_{zr}^c(r/R, z/R) - \frac{R'}{R} K_{zr}^c(r/R', z/R') \right] \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

avec :

- $p = \gamma h$ (charge exercée par le remblai au centre de sa base),
 γ : poids volumique du matériau en remblai,
 h : hauteur du remblai,
 R : rayon de la base du remblai,
 R' : rayon du sommet du remblai,
 r : distance entre l'axe du remblai et le point où l'on calcule les contraintes (Fig. 5),
 z : profondeur du point où l'on calcule les contraintes,
 ν : coefficient de Poisson du sol de fondation,
 K : coefficients sans dimensions donnés dans les Tables (pour le moment, ces coefficients n'ont été calculés qu'à la verticale du centre du remblai : $r = 0$).

Exemple 4 :

Considérons un remblai tronconique de révolution dont la base a pour rayon $R = 16$ m (52 ft) et la plate-forme $R' = 8$ m (26 ft). Le poids volumique du matériau est $\gamma = 1,75$ g/cm³ (109 lb/cu.ft). Quelle est la contrainte σ_z à la profondeur 32 m (104 ft) ? Les données sont-elles suffisantes pour permettre le calcul de σ_r ?

Le rapport R'/R étant supérieur à 0,366, seule l'hypothèse linéaire est possible.

- Calculons d'abord p :

$$p = 1\,750 \times 9,81 \times 4 = 69\,000 \text{ pascals} = 0,69 \text{ bar} = 109 \times 13 \text{ (1 420 lb/sq.ft) .}$$

- Calcul de σ_z :

$$\sigma_z = \frac{0,69 \times 16}{8} \left[0,106 - \frac{1}{2} 0,030 \right] = 0,12 \text{ bar (258 lb/sq.ft) .}$$

- Calcul de σ_r :

Il manque la donnée de v .

TABLES ET GRAPHIQUES

- Calcul du tassement

Coefficients : M^C , M^P : pp. 338 et 339.

- Calcul des contraintes

Coefficients : K_z^C , K_r^C , $K_r'^C$, K_θ^C , $K_\theta'^C$, K_{zr}^C : p. 340.

K_z^P , K_r^P , $K_r'^P$, K_θ^P , $K_\theta'^P$, K_{zr}^P : p. 341.

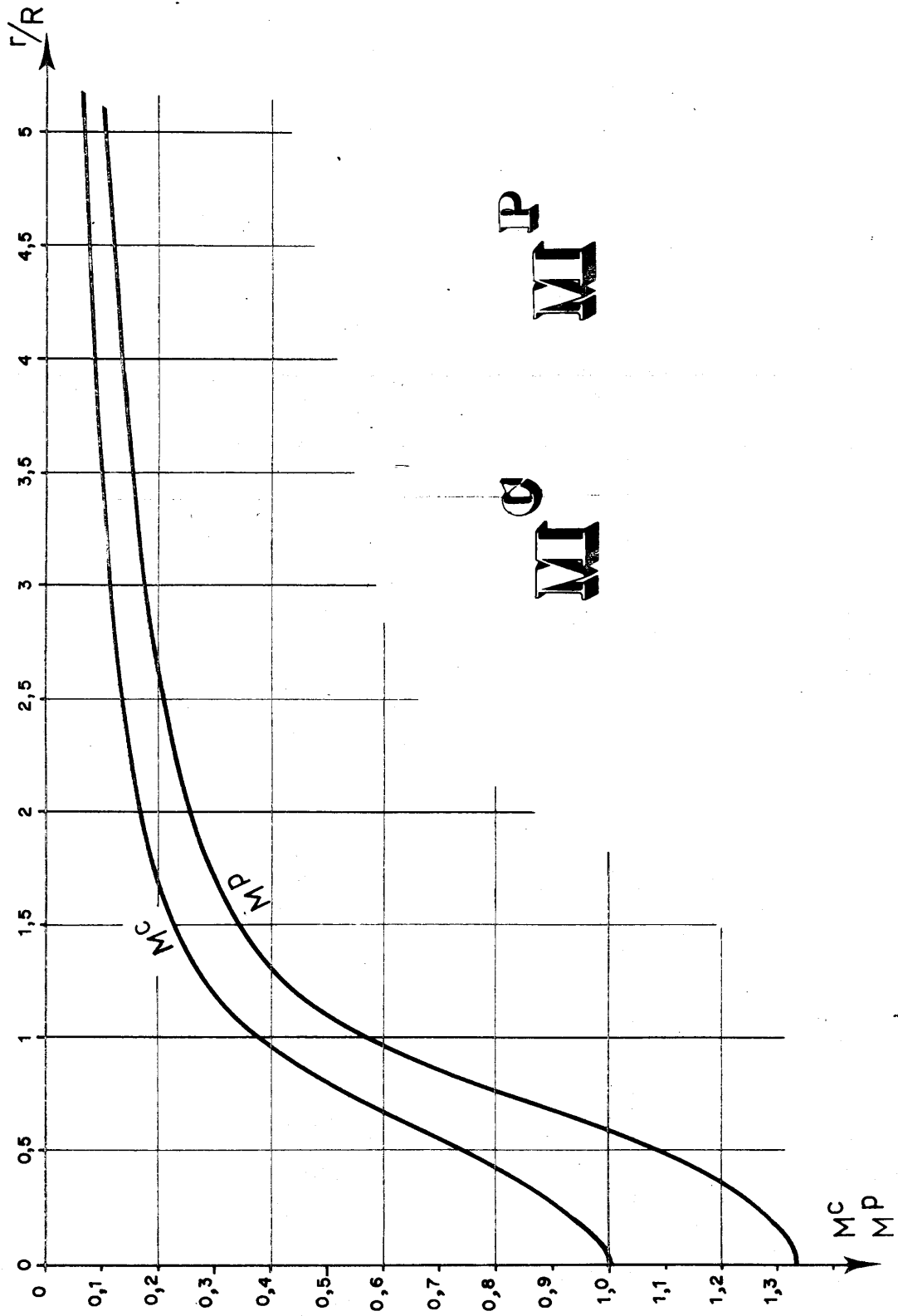
TASSEMENT PROVOQUE PAR UN REMBLAI CONIQUE OU TRONCONIQUE

Coefficients M^C (charge linéaire) et M^P (charge parabolique)

r/R	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
M^C	1	0,982	0,940	0,884	0,817	0,743	0,665	0,586	0,508
M^P	1,333	1,323	1,294	1,245	1,178	1,095	0,999	0,892	0,779

r/R	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
M^C	0,434	0,401	0,372	0,348	0,329	0,296	0,270	0,249	0,231
M^P	0,666	0,613	0,566	0,529	0,498	0,448	0,408	0,375	0,348

r/R	1,6	1,7	1,8	1,9	2	3	4	5	$r/R > 5$
M^C	0,215	0,196	0,185	0,175	0,167	0,111	0,083	0,067	$\frac{1}{3} \frac{R}{r}$
M^P	0,324	0,304	0,286	0,270	0,256	0,168	0,126	0,100	$\frac{1}{2} \frac{R}{r}$



CONTRAINTES SOUS LE CENTRE D'UN

REMBLAI CONIQUE OU TRONCONIQUE

(charge linéaire)

(pour $r = 0$ seulement)

z/R	K_z^c	$K_r^c = K_\theta^c$	$K_r'^c = K_\theta'^c$	K_{zr}^c
0	1	1	0,5	0
0,1	0,900	0,600	0,350	0
0,2	0,804	0,404	0,269	0
0,3	0,713	0,280	0,212	0
0,4	0,629	0,197	0,171	0
0,5	0,553	0,141	0,139	0
0,6	0,486	0,102	0,115	0
0,7	0,427	0,075	0,096	0
0,8	0,375	0,055	0,081	0
0,9	0,331	0,041	0,069	0
1,0	0,293	0,031	0,059	0
1,2	0,232	0,019	0,045	0
1,5	0,168	0,009	0,031	0
2,0	0,106	0,004	0,019	0
2,5	0,072	0,002	0,012	0
3,0	0,051	0,001	0,009	0
4,0	0,030	0,000	0,005	0
5,0	0,019		0,003	0
6,0	0,014		0,002	0
7,0	0,010		0,002	0
8,0	0,008		0,001	0
9,0	0,006		0,001	0
10,0	0,005		0,001	0
20,0	0,001		0,000	0

CONTRAINTES SOUS LE CENTRE D'UN

REMBLAI CONIQUE OU TRONCONIQUE

(charge parabolique)

(pour $r = 0$ seulement)

z/R	K_z^P	$K_r^P = K_\theta^P$	$K_r^P = K_\theta^P$	K_{zr}^P
0	1	1	0,5	0
0,1	0,982	0,738	0,410	0
0,2	0,936	0,540	0,336	0
0,3	0,872	0,395	0,277	0
0,4	0,799	0,288	0,229	0
0,5	0,724	0,211	0,191	0
0,6	0,650	0,156	0,160	0
0,7	0,582	0,116	0,136	0
0,8	0,520	0,087	0,116	0
0,9	0,464	0,066	0,099	0
1,0	0,414	0,050	0,086	0
1,2	0,332	0,030	0,066	0
1,5	0,244	0,015	0,046	0
2,0	0,155	0,006	0,028	0
2,5	0,106	0,003	0,019	0
3,0	0,076	0,001	0,013	0
4,0	0,045	0,0005	0,008	0
5,0	0,029	0,0001	0,005	0
6,0	0,020	0,000	0,003	0
7,0	0,015		0,003	0
8,0	0,012		0,002	0
9,0	0,009		0,002	0
10,0	0,007		0,001	0
20,0	0,002		0,000	0

EXPRESSION DES COEFFICIENTSEXPRESSION DE M^C Si $r \leq R$:

$$\begin{aligned}
M^C = \frac{r^2}{R^2} & \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2.5} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3.7} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \dots \right. \\
& \left. + \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 + \dots \right] \\
& + \frac{2r^2}{R^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{Log} \frac{R}{r} \right. \\
& - \frac{1}{2.3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \frac{1}{4.5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right) - \dots \\
& \left. - \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(1 - \frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\right) \dots \right]
\end{aligned}$$

Si $r \geq R$:

$$\begin{aligned}
M^C = \frac{R}{r} & \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2.5} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{3.7} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^4 + \dots \right. \\
& \left. + \frac{1}{(n+1)(2n+3)} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} + \dots \right].
\end{aligned}$$

EXPRESSION DE M^P

Si $r = 0$: $M^P = 4/3.$

Si $r \leq R$:

$$\begin{aligned}
M^P = 4 & \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{1.3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{r^4}{R^4} + \frac{1}{3.5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{r^6}{R^6} + \dots \right. \\
& \left. + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \frac{r^{2n}}{R^{2n}} + \dots \right]
\end{aligned}$$

Si $r = R$: $M^P = 16/9 \pi.$

Si $r \gg R$:

$$M^p = \frac{R}{r} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{1}{3.4} \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \frac{R^4}{r^4} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n} \right)^2 \frac{R^{2n}}{r^{2n}} + \dots \right].$$

EXPRESSION DES COEFFICIENTS DONNANT LES CONTRAINTES

Ces coefficients n'ont une expression analytique que sur l'axe ($r = 0$) :

$$K_z^c = 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

$$K_r^c = K_\theta^c = 1 + \frac{z}{2\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{3z}{2R} \operatorname{Log} \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z},$$

$$K_r'^c = K_\theta'^c = \frac{1}{2} - \frac{z}{2R} \operatorname{Log} \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z},$$

$$K_z^p = \left(1 + \frac{2z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \left(\frac{R}{z + \sqrt{R^2 + z^2}} \right)^2,$$

$$K_r^p = K_\theta^p = \left(\sqrt{1 + z^2/R^2} - z/R \right)^2 \left(1 - \frac{z/R}{\sqrt{1 + z^2/R^2}} \right),$$

$$K_r'^p = K_\theta'^p = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + z^2/R^2} - z/R \right]^2.$$

BIBLIOGRAPHIE

Nous avons obtenu tous les coefficients par intégration des formules de base données par Boussinesq [1] pour la force concentrée et la charge circulaire uniforme. Pour les tassements, n'ayant rien trouvé d'analogue dans la littérature, nous avons publié nos résultats [2]. Pour les contraintes, les valeurs que nous avons obtenues concordent avec celles de Harr et Lovell [3]. Nous préparons actuellement des tables de contraintes pour les points situés ailleurs que sur l'axe.

- [1] J. BOUSSINESQ, "Application des Potentiels à l'Etude de l'Equilibre du Mouvement des solides Elastiques", Gauthier-Villars (Paris 1885) p. 79, 104, 107, 141, 188.
- [2] J.P. GIROUD, "Calcul rapide du tassement d'un sol supportant un remblai conique ou tronconique", Le Moniteur des Travaux Publics et du Bâtiment (4 Juillet 1970), 167-170.
- [3] M.E. HARR and C.W. LOVELL, "Vertical Stresses Under Certain Axisymmetrical Loadings", Highway Research Record, 39 (1963), 68-81.

FONDATION ANNULAIRE
(Cheminées, Tours)
sur un sol homogène d'épaisseur infinie

SOMMAIRE

- Définition du sol.
- Définition de la charge.
- Calcul du tassement.
- Calcul du tassement moyen.
- Tables et Graphiques.
- Expression des coefficients.
- Bibliographie.

DEFINITION DU SOL

Le sol est supposé homogène sur une épaisseur infinie. En pratique, si le sol est constitué d'une couche relativement homogène, reposant sur un sol plus résistant, il suffit que l'épaisseur de la couche soit supérieure à 6 fois le rayon extérieur de l'anneau pour que les valeurs du tassement données ici constituent une bonne approximation.

DEFINITION DE LA CHARGE

La charge est supposée normale et uniformément répartie sur un anneau de largeur e et de rayon extérieur R , à la surface du sol (Fig. 1).

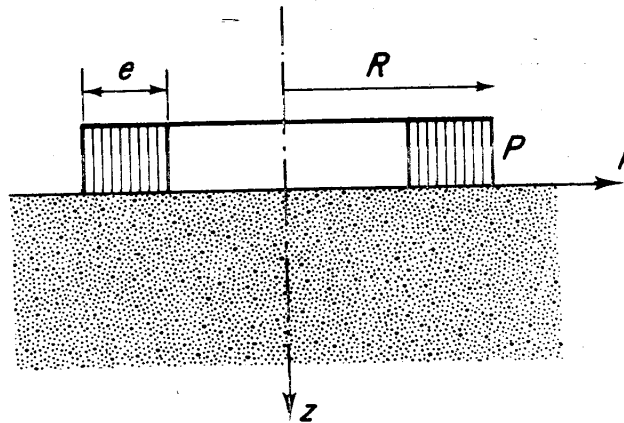


FIG. 1. — Définition de la charge annulaire uniforme.

CALCUL DIRECT DU TASSEMENT

Le tassement w , d'un point de la surface du sol situé à une distance r de l'axe de la fondation annulaire est donné par :

$$(1) \quad w = \frac{1 - \nu^2}{E} p e M_A$$

avec :

- ν, E : coefficient de Poisson et module d'Young du sol,
- p : contrainte normale uniforme exercée par la fondation sur le sol,
- e : largeur de l'anneau (Fig. 1),

M_A : coefficient sans dimensions dont les valeurs numériques sont données dans une table et un graphique en fonction de e/R et r/R ,
 R : rayon extérieur de l'anneau.

Si la fondation annulaire est rigide, la charge n'est pas uniformément répartie. Cependant, dans ce cas, le coefficient M_A permet de calculer, avec une bonne approximation, le tassement des points extérieurs situés à une distance du bord de l'anneau supérieure à sa largeur ($r - R > e$).

Exemple 1 :

Considérons une fondation annulaire de rayon extérieur $R = 5$ m (16,5 ft) et de largeur $e = 50$ cm (20 inches), exerçant une charge moyenne de 1,2 bar (2 500 lb/sq. ft) sur un sol homogène de module $E = 25$ bars (52 000 lb/sq.ft) et de coefficient de Poisson $\nu = 0,4$. Quel est le tassement provoqué en un point situé à 1 m (40 in) du bord ?

Pour $(r - R)/e = 1/0,5 = 40/20 = 2$ et $e/R = 0,1$, on lit dans la table :

$$M_A = 2,00 .$$

Le tassement est alors donné par (1) :

$$\begin{aligned} w &= \frac{1 - (0,4)^2}{25} \times 1,2 \times 50 \times 2,00 = 4 \text{ cm} , \\ &= \frac{1 - (0,4)^2}{52\,000} \times 2\,500 \times 20 \times 2 = 1,6 \text{ in} . \end{aligned}$$

CALCUL DU TASSEMENT MOYEN

La moyenne du tassement de tous les points situés au contact du sol et de l'anneau uniformément chargé s'écrit :

$$(2) \quad w_m = \frac{1 - \nu^2}{E} p e M_{Am}$$

avec :

M_{Am} : coefficient sans dimensions dont les valeurs numériques sont données en fonction de e/R dans une table et un graphique.

Le "tassement moyen", w_m , est très voisin du tassement que l'on obtiendrait pour un anneau rigide supportant la même charge totale.

Exemple 2 :

Quel est le tassement de la fondation de l'exemple précédent, supposée rigide ?

Une bonne approximation en est donnée par le "tassement moyen" de l'anneau uniformément chargé :

$$\text{pour } e/R = 0,1 \quad M_{Am} = 3,71 .$$

D'où :

$$w_m = (0,84)/(25) \times 1,2 \times 50 \times 3,71 = 7,5 \text{ cm} ,$$

$$w_m = (0,84)/(52\ 000) \times 2\ 500 \times 20 \times 3,71 = 3 \text{ in} .$$

TABLES ET GRAPHIQUES

- Calcul du tassement moyen

Coefficient M_{Am} : p. 349.

- Calcul du tassement

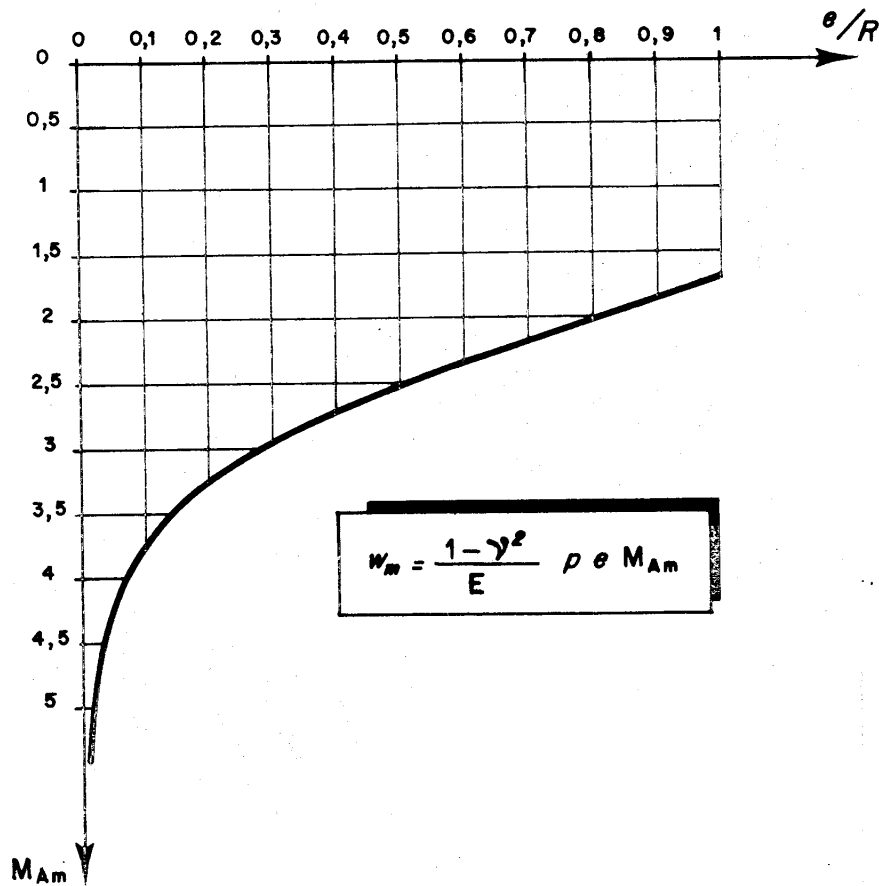
Coefficient M_A : pp. 350 et 351.

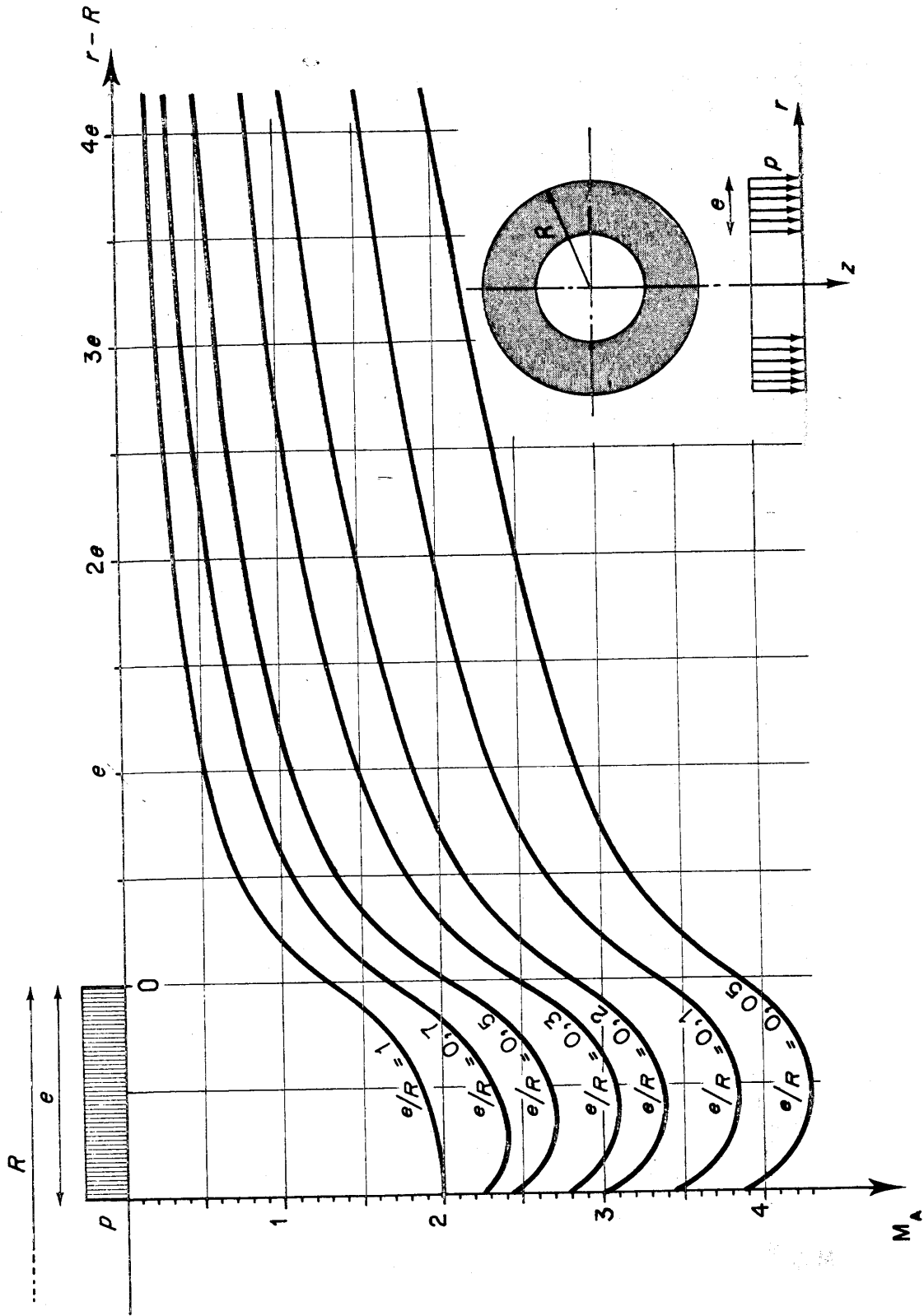


e/R	M_{Am}
0	∞
0.001	6.672
0.002	6.233
0.003	5.976
0.004	5.792
0.005	5.650
0.006	5.534
0.007	5.435
0.008	5.350
0.009	5.275

e/R	M_{Am}
0.01	5.205
0.02	4.763
0.03	4.501
0.04	4.315
0.05	4.170
0.06	4.050
0.07	3.949
0.08	3.860
0.09	3.782
0.1	3.712

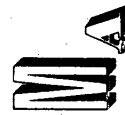
e/R	M_{Am}
0.15	3.435
0.2	3.233
0.3	2.934
0.4	2.705
0.5	2.513
0.6	2.340
0.7	2.178
0.8	2.021
0.9	1.863
1	1.698





e/R	$\frac{r-R}{e}$											
	-1	-0.8	-0.6	-0.5	-0.4	-0.2	0	0.5	1	1.5	2	2.5
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,05	3.889	4.193	4.288	4.293	4.272	4.147	3.815	3.179	2.883	2.667	2.516	2.385
0,1	3.459	3.752	3.835	3.834	3.808	3.673	3.331	2.681	2.376	2.164	2.000	1.867
0,2	3.033	3.305	3.368	3.357	3.322	3.169	2.814	2.148	1.874	1.626	1.467	1.341
0,3	2.783	3.036	3.079	3.060	3.016	2.850	2.486	1.814	1.509	1.306	1.157	1.041
0,5	2.464	2.674	2.680	2.646	2.589	2.404	2.029	1.368	1.086	0.908	0.783	0.689
0,7	2.246	2.400	2.369	2.322	2.257	2.063	1.689	1.056	0.807	0.657	0.555	0.482
1	2.000	1.980	1.917	1.868	1.806	1.625	1.273	0.712	0.517	0.409	0.338	0.289

e/R	$\frac{r-R}{e}$											
	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40	50	100
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,05	2.273	2.092	1.947	1.826	1.633	1.485	1.220	1.042	0.813	0.668	0.568	0.327
0,1	1.755	1.576	1.435	1.321	1.144	1.012	0.790	0.650	0.482	0.384	0.319	0.173
0,2	1.237	1.075	0.952	0.857	0.715	0.614	0.456	0.363	0.258	0.201	0.164	0.086
0,3	0.948	0.805	0.702	0.622	0.508	0.430	0.311	0.244	0.170	0.131	0.106	0.055
0,5	0.616	0.509	0.434	0.379	0.302	0.251	0.177	0.137	0.094	0.071	0.058	0.029
0,7	0.426	0.345	0.291	0.251	0.198	0.163	0.113	0.087	0.059	0.045	0.036	0.018
1	0.252	0.201	0.167	0.143	0.111	0.091	0.063	0.048	0.032	0.024	0.020	0.010



EXPRESSION DES COEFFICIENTS

Le coefficient sans dimension M_A dépend de l'abscisse radiale, r , du point dont on calcule le tassement :

• Sur l'anneau ($R - e \leq r \leq R$) :

$$(2) \quad M_A = \frac{2R}{e} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^4 \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} \dots \right] \\ - \frac{(R-e)^2}{re} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{R-e}{r}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{R-e}{r}\right)^4 \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{R-e}{r}\right)^{2n} \dots \right]$$

• A l'extérieur ($r > R$) :

$$(3) \quad M_A = \frac{R^2}{re} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^4 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} + \dots \right] \\ - \frac{(R-e)^2}{re} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{R-e}{r}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{R-e}{r}\right)^4 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \left(\frac{R-e}{r}\right)^{2n} + \dots \right].$$

Le coefficient sans dimension M_{Am} a pour expression :

$$(6) \quad M_{Am} = \frac{R^2}{e^2(1-e/2R)} \left[\frac{e(2R-e)}{R^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1-(1-e/R)^4}{2} \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{1-(1-e/R)^6}{3} \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \frac{1-(1-e/R)^{2(n+1)}}{n+1} \dots \right] \\ - \frac{R^2(1-e/R)^3}{e^2(1-e/2R)} \left[\frac{e}{R-e} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e}{r} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3.3} \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \left(1 - (1 - e/R)^3 \right) \dots \\
 & + \frac{1}{(n+1)(2n-1)} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{2.4 \dots 2n} \right)^2 \left(1 - (1 - e/R)^{2n-1} \right) \dots \Big].
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

Nous publions par ailleurs le détail des calculs qui nous ont permis d'obtenir les coefficients M_A et M_{Am} [1].

REFERENCE

- [1] J.P. GIROUD, "Tassement de la surface d'un massif semi-infini supportant une charge annulaire", Revue Roumaine des Sciences Techniques, Mécanique Appliquée, 16, 4 (1971), 867-873.

INDEX

adhérence (entre deux couches).....	Vol. I	(Introduction § 3)
admissible (pression).....	Vol. III	(Introduction)
angle de frottement interne.....	Vol. I	(Introduction § 3 ; Sections 1-4, 1-5)
anisotrope (sol).....	Vol. I	(Introduction § 3)
	Vol. III	(Section 7-3)
annulaire (fondation).....	Vol. I	(Section 3-10)
approximation (grandeur de l').....	Vol. I	(Deuxième page du chap. 2)
	Vol. II	(Deuxième page du chap. 6)
argile.....	Vol. I	(Section 1-5)
assise rigide.....		Voir substratum
axes (systèmes d').....	Vol. I	(Section 1-2)
bande infinie.....	Vol. II	(Chap. 6)
bibliographie.....	Vol. I	(Introduction § 10)
bicouche.....	Vol. I	(Sections 2-3, 3-3)
	Vol. II	(Sections 6-3, 6-6)
	Vol. III	(Section 7-5)
calcul direct du tassement.....	Vol. I	(Introduction § 5)
calcul indirect du tassement.....	Vol. I	(Introduction § 5)
caractéristiques du sol.....	Vol. I	(Section 1-5)
cartésiennes (coordonnées).....	Vol. I	(Section 1-2)
charge.....	Vol. I	(Introduction § 1)
charge excentrée.....	Vol. I	(Section 3-7)
	Vol. II	(Sections 4-1 et 4-2)
	Vol. III	(Chap. 8)
charge inclinée.....	Vol. I	(Section 2-1)
	Vol. II	(Sections 4-1 et 4-4)
	Vol. III	(Chap. 8)
charge linéairement répartie.....	Vol. II	(Sections 4-1, 4-2, 6-4)
charge normale uniforme.....	Vol. I	(Sections 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5)
	Vol. II	(Sections 4-1, 4-2, 4-3)
cheminée.....	Vol. I	(Section 3-10)
circulaire.....	Vol. I	(Chap. 3)
coefficient de POISSON.....	Vol. I	(Introduction § 3 ; Section 1-5)

coefficient de réduction.....	Vol. III	(Section 8-1)
coefficient de sécurité.....	Vol. III	(Introduction)
cohésion.....	Vol. I	(Introduction § 3 ; Section 1-5)
compatibilité (relations de).....	Vol. I	(Section 1-2)
compressibilité.....	Vol. I	(Section 1-3)
concentrée (charge, force).....	Vol. I	(Chap. 2)
conique (remblai).....	Vol. I	(Section 3-9)
contraintes.....	Vol. I	(Section 1-2)
conventions de signe.....	Vol. I	(Section 1-2)
conversion d'unités.....	Vol. I	(Section 1-1)
coordonnées.....	Vol. I	(Section 1-2)
COULOMB (loi de).....	Vol. I	(Section 1-4)
cylindriques (coordonnées).....	Vol. I	(Section 1-2)
damier.....	Vol. II	(Sections 6-12 et 6-13)
déformation.....	Vol. I	(Section 1-2)
déformation plane.....	Vol. II	(Deuxième page du Chap. 6)
déplacement.....	Vol. I	(Section 1-2)
deux couches.....	Vol. I	(Sections 2-3 et 3-3)
	Vol. II	(Sections 6-3 et 6-6)
	Vol. II	(Section 7-5)
deux dimensions.....	Vol. II	(Deuxième page du chap. 6)
déviatoire (module).....	Vol. I	(Section 1-3)
direct (calcul).....	Vol. I	(Introduction § 5)
distorsion.....	Vol. I	(Section 1-2)
distorsion (module de).....	Vol. I	(Section 1-3)
distribution linéaire.....	Vol. II	(Sections 4-1, 4-2, 6-4)
distribution parabolique.....	Vol. I	(Section 3-9)
	Vol. II	(Section 6-10)
distribution trapézoïdale.....	Vol. II	(Sections 6-10 et 6-11)
distribution triangulaire.....	Vol. II	(Sections 6-10 et 6-11)
drainage (avant drainage, après drainage)..	Vol. I	(Introduction § 3 ; Section 1-5)
drainé (non drainé).....	Vol. I	(Section 1-5)
élasticité.....	Vol. I	(Introduction § 5 ; Section 1-3)
épaisseur finie (couche d').....	Vol. I	(Sections 2-2, 3-2 et 3-8)
équilibre indéfini (équations de l').....	Vol. I	(Section 1-2)
excentrée (charge).....	Vol. I	(Section 3-7)
	Vol. II	(Sections 4-1 et 4-2)
	Vol. III	(Chap. 8)
excentricité de la charge.....	Vol. III	(Chap. 8)
excentricité optimale.....	Vol. III	(Chap. 8)

fictive (inclinaison).....	Vol. III	(Introduction)
force concentrée.....	Vol. I	(Chap. 2)
force par unité de longueur.....	Vol. I	(Section 2-4)
force portante.....	Vol. I	(Introduction § 4)
	Vol. III	(Chap. 7 et 8)
frottement interne.....	Vol. I	(Introduction § 3 ; Section 1-5)
glissement (entre deux couches).....	Vol. III	(Section 7-4)
glissement (surface de).....	Vol. I	(Introduction § 4)
grande longueur (fondation de).....	Vol. II	(Chap. 6)
gravier.....	Vol. I	(Section 1-5)
grille.....	Vol. II	(Chap. 5)
hauteur (de remblai).....	Vol. I	(Section 3-9)
	Vol. II	(Sections 4-6, 6-10 et 6-11)
hétérogène (sol).....	Vol. I	(Introduction § 3)
homogène (sol).....	Vol. I	(Introduction § 3)
HOOKE (loi de).....	Vol. I	(Section 1-3)
incliné (sol).....	Vol. III	(Sections 7-8 et 8-3)
inclinée (base de la fondation).....	Vol. III	(Sections 7-9 et 8-4)
inclinée (charge).....	Vol. I	(Section 2-1)
	Vol. II	(Sections 4-1 et 4-4)
	Vol. III	(Chap. 8)
incompressible.....	Vol. I	(Section 1-2)
indirect (calcul).....	Vol. I	(Introduction § 5)
infinie (bande).....	Vol. II	(Chap. 6)
infinie (fondation de longueur).....	Vol. II	(Chap. 6)
instantané (tassement).....	Vol. I	(Introduction § 2 et 5)
isotrope (sol).....	Vol. I	(Introduction § 3)
LAME (coefficients de).....	Vol. I	(Section 1-3)
LAME (équation de NAVIER).....	Vol. I	(Section 1-3)
largeur des fondations.....	Vol. I	(Introduction § 1)
ligne de longueur finie.....	Vol. I	(Section 2-4)
limite (pression).....	Vol. I	(Introduction § 4)
	Vol. III	(Introduction)
linéairement répartie (contrainte).....	Vol. II	(Sections 4-1, 4-2 et 6-4)
longueur des fondations.....	Vol. I	(Introduction § 1)
	Vol. II	(Deuxième page du Chap. 6)
longueur (grande).....	Vol. II	(Chap. 6)

masse volumique.....	Vol. I	(Section 1-5)
milieu semi-infini.....	Vol. I	(Sections 2-1, 2-4, 3-1, 3-6, 3-7, 3-9 et 3-10)
	Vol. II	(Sections 4-1, 4-2, 4-5, 4-6, 5-1, 6-1, 6-4, 6-8, 6-10 et 6-12)
	Vol. III	(Sections 7-1, 7-9, 8-1 et 8-4)
module d'YOUNG.....	Vol. I	(Introduction § 3 ; Sections 1-3 et 1-5)
module fonction de la profondeur.....	Vol. I	(Section 3-5)
	Vol. II	(Section 6-7)
	Vol. III	(Section 7-6)
moment.....	Vol. I	(Section 3-7)
	Vol. II	(Sections 4-1, 6-4, 6-8 et 6-9)
	Vol. III	(Chapitre 8)
monocouche (sol).....	Vol. I	(Sections 2-2, 3-2 et 3-8)
	Vol. II	(Sections 4-3 et 4-4)
	Vol. III	(Section 7-4)
mur de soutènement (fondation de).....	Vol. II	(Sections 4-1, 6-4 et 6-8)
	Vol. III	(Chapitre 8)
nappe phréatique.....	Vol. III	(Section 7-7)
NAVIER-LAME (équations de).....	Vol. I	(Section 1-3)
normale (charge).....	Vol. I	(Chapitres 2, 3, 4, 5, 6 et 7 : toutes les sections).
notations.....	Vol. I	(Introduction § 9)
oblique (base).....	Vol. III	(Sections 7-9 et 8-4)
orthotrope.....	Vol. III	(Section 7-3)
parabolique (charge).....	Vol. I	(Section 3-9)
	Vol. II	(Section 6-10)
paramètres mécaniques du sol.....	Vol. I	(Section 1-5)
penne.....	Vol. III	(Sections 7-8 et 8-3)
plasticité.....	Vol. I	(Introduction § 4, Section 1-4)
poids volumique du sol.....	Vol. I	(Introduction § 3, Section 1-5)
POISSON (coefficient de).....	Vol. I	(Introduction § 3, Sections 1-3 et 1-5)
punctuelle (force, charge).....	Vol. I	(Sections 2-1, 2-2 et 2-3)
poteau.....	Vol. I	(Sections 2-1, 2-2 et 2-3)
pression.....	Vol. I	(Section 1-1)

pression admissible.....	Vol. III	(Introduction)
pression limite.....	Vol. I	(Introduction § 4)
	Vol. III	(Introduction)
profondes (fondations).....	Vol. I	(Introduction § 1)
profondeur (des fondations).....	Vol. I	(Introduction § 1 et § 5)
profondeur (module fonction de).....	Vol. I	(Section 3-5)
	Vol. II	(Section 6-7)
	Vol. III	(Section 7-6)
propriétés du sol.....	Vol. I	(Introduction § 3 ; Section 1-5)
pyramidal (remblai).....	Vol. II	(Section 4-6)
quelconque (charge de forme).....	Vol. II	(Chapitre 5)
radier.....	Vol. I	(Introduction § 1)
rectangulaire (fondation).....	Vol. II	(Chapitre 4)
remblai.....	Vol. I	(Section 3-10)
	Vol. II	(Sections 4-6, 6-10 et 6-11)
réservoir.....	Vol. I	(Sections 3-1, 3-2, 3-3, 3-4 et 3-5)
résultante des charges appliquées.....	Vol. II	(Sections 4-1 et 6-4)
rigide (fondation, radier).....	Vol. I	(Sections 3-6, 3-7 et 3-8)
	Vol. II	(Sections 4-5, 6-8 et 6-9)
rigide (substratum).....	Vol. I	(Sections 2-2, 3-2 et 3-8)
	Vol. II	(Sections 4-3, 5-2, 6-2, 6-5, 6-9, 6-11 et 6-13)
rotation.....	Vol. II	(Sections 4-1, 6-4, 6-8 et 6-9)
rotation moyenne.....	Vol. II	(Sections 4-1 et 6-4)
sable.....	Vol. I	(Section 1-5)
sécurité (coefficient de).....	Vol. III	(Introduction)
semelle filante.....	Vol. II	(Chapitre 6)
	Vol. III	(Chapitres 7 et 8)
semelle isolée.....	Vol. I	(Chapitres 2 et 3)
	Vol. II	(Chapitre 4)
semi-infini (milieu).....	Vol. I	(Sections 2-1, 2-4, 3-1, 3-6, 3-7, 3-9 et 3-10)
	Vol. II	(Sections 4-1, 4-2, 4-5, 4-6, 5-1, 6-1, 6-4, 6-8, 6-10 et 6-12)
	Vol. III	(Sections 7-1, 7-9, 8-1 et 8-4)
signes (convention de).....	Vol. I	(Section 1-2)
silo (fondation de).....	Vol. I	(Chapitre 3)

silt.....	Vol. I	(Section 1-5)
souple (radier).....	Vol. I	(Introduction § 6)
sphériques (coordonnées).....	Vol. I	(Section 1-2)
stratifié (sol).....	Vol. III	(Section 7-2)
substratum indéformable.....	Vol. I	(Sections 2-2, 3-2 et 3-8)
	Vol. II	(Sections 4-3, 4-4, 6-2, 6-5, 6-9, 6-11 et 6-13)
	Vol. III	(Section 7-4)
superficielle (fondation).....	Vol. I	(Introduction § 1)
systèmes de coordonnées.....	Vol. I	(Section 1-2)
tassement.....	Vol. I	(Introduction § 5)
tassement final (total).....	Vol. I	(Introduction § 2 et 5)
tassement instantané.....	Vol. I	(Introduction § 2 et 5)
tassement moyen.....	Vol. I	(Sections 3-1 et 3-2)
	Vol. II	(Sections 4-1 et 6-5)
taux de travail.....	Vol. III	(Introduction)
tenseur contrainte.....	Vol. I	(Section 1-2)
tenseur déformation.....	Vol. I	(Section 1-2)
terme (court terme et long terme).....	voir drainage (avant drainage, après drainage)	
terril.....	Vol. I	(Section 3-9)
trapézoïdal (remblai).....	Vol. II	(Sections 6-10 et 6-11)
triangulaire (remblai).....	Vol. II	(Sections 6-10 et 6-11)
tricouche (sol).....	Vol. I	(Section 3-4)
trois couches.....	Vol. I	(Section 3-4)
trois dimensions.....	Vol. I	(Introduction § 5)
tronconique (remblai).....	Vol. I	(Section 3-9)
uniforme (pression, charge normale).....	Vol. I	(Sections 3-1, 3-2, 3-3, 3-4 et 3-5)
	Vol. II	(Sections 4-1, 4-2, 4-3, 6-4, 6-5, 6-6 et 6-7)
unités.....	Vol. I	(Introduction § 8, Section 1-1)
YOUNG (module d').....	Vol. I	(Introduction § 3, Section 1-5)

Imprimé en France

Imprimerie JOUVE, 17, rue du Louvre, 75001 PARIS

Dépôt légal : N° 7655. — 4^e trimestre 1972